Universidad Autónoma de Madrid — Curso 2009-10

TOPOLOGÍA — Hoja de ejercicios 4

I.6 Funciones continuas. Homeomorfismos.

1. Demuestra que la función diagonal $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}\colon x \mapsto d(x) = (x, x)$ es continua.

2. Halla una función continua y biyectiva del intervalo $(-1, 1)$ en el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ (x+1)^2 + y^2 = 1\},$$

ambos con la topología usual.
(Más adelante sabremos demostrar que estos espacios no son homeomorfos.)

3. Sea $X = [0, 1]$ con la topología usual e $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden lexicográfico. Estudia si las siguientes funciones son continuas.

(1) $f\colon X \to Y : t \mapsto f(t) = (t, t)$;
(2) $g\colon X \to Y : t \mapsto g(t) = (1/2, (2t + 1)/4)$, y
(3) $h\colon X \to Y : t \mapsto h(t) = (t, 1)$.

4. Prueba que existen funciones de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ en $\mathbb{N}$ con la topología discreta que son sobreyectivas y continuas, pero que no existen funciones de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ en $\mathbb{R}$ con la topología discreta que tengan tales propiedades.
(Indicación: la imagen inversa de $\mathbb{R}$ sería una unión no numerable de abiertos disjuntos y $[a, b)$ contiene siempre un número racional.)

5. Da un ejemplo de una función continua $f : X \to Y$ cuyo grafo $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ no sea cerrado en $X \times Y$ y de una función no continua cuyo grafo sí lo sea.
(Indicación: Piensa en la identidad de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ poniendo topologías adecuadas en el espacio de salida y en el de llegada.)

6. Estudia si $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{[\,)}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{(\,]}$. ¿Es la identidad entre ambos espacios un homeomorfismo?

7. Demuestra que los espacios $X = [0, 2) \cup [4, 5]$ e $Y = [0, 3]$ son homeomorfos con la topología del orden.

8. Sea $A = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ y $f : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x - 2 & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

Demuestra que f es continua si A tiene la topología del orden o la de subespacio, pero que sólo es un homeomorfismo con la del orden.

9. Demuestra que $[0, \infty) \times [0, \infty)$, con la topología usual es homeomorfo a

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2 + y^2 < 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$$