III.2 Espacios recubridores. Retractos de deformación. Cálculo de algunos grupos fundamentales.

1. Encontrar dos espacios que tengan el mismo grupo fundamental pero que no sean homeomorfos.

2. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaders o falsas.

(i) Si A y D son subespacios simplemente conexos con $A \cap D \neq \emptyset$, entonces $A \cup D$ también lo es.

(ii) Si X es homeomorfo a la frontera de $[0,1] \times [0,1]$, el grupo fundamental de X es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

(iii) Si el grupo fundamental de X es isomorfo a $\mathbb{Z}$ y X es conexo por caminos, entonces X es homeomorfo a S^1.

(iv) Si A y D son retractos de deformación fuerte de espacios homeomorfos, entonces A y D son homeomorfos.

3. Decide razonadamente si los siguientes espacios topológicos son homeomorfos:

(a) $X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) $X_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

(c) $X_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(d) $X_4 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 < y < 1\}$.

4. Hallar el grupo fundamental de $\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ y de $\{x^2 + y^2 \geq 4\}$.

5. Demostrar que la relación “ser un retracto de deformación fuerte” es transitiva, esto es, si A lo es de D y D de C, entonces A lo es de C.

6. Hallar el grupo fundamental del toro sólido ($= \overline{D^1} \times S^1$, donde $D^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$) .

7. Probar que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$ y $A \cup \{(1,0)\}$ no son homeomorfos.

8. Decide razonadamente si los siguientes espacios topológicos son homeomorfos:

(i) $\mathbb{R} \times S^1 \times (S^2 \setminus \{(0,0,1)\})$.

(ii) $\mathbb{R}^2 \times (S^2 \setminus \{(0,0,1)\})$.

(iii) $\mathbb{R}^4$.

9. Sea $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Demostrar que un homeomorfismo $f : D \longrightarrow D$ envía la frontera en la frontera y el interior en el interior.
(Indicación: considérense los grupos fundamentales de $D \setminus \{p\}$ y $D \setminus \{f(p)\}$.)

10. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos del espacio X que verifique las siguientes condiciones:
(i) existe un punto x_0 tal que $x_0 \in U_i$ para todo $i \in I$;
(ii) para cada $i \in I$, U_i es simplemente conexo, y
(iii) si $i \neq j$, $U_i \cap U_j$ es conexo por caminos.
Probar que X es simplemente conexo. Deducir que S^n es simplemente conexo si $n \geq 2$.
(Indicación: Para probar que todo lazo $\alpha : I \to X$ con base en x_0 es trivial, considerese primero el recubrimiento abierto $\{\alpha^{-1}(U_i)\}$ del compacto $I = [0,1]$ y, con ayuda del número de Lebesgue de este recubrimiento, escribir $\alpha = \alpha_1 * ... * \alpha_n$ tal que $\alpha_j(I)$ es subconjunto de algún U_j).

11. Demostrar que S^n (la esfera n-dimensional) es un retracto de deformación fuerte de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\}$. Utilizar este hecho para demostrar que $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ con $n \neq 2$.