Universidad Autónoma de Madrid — Curso 2009-10

$2^{\underline{o}}$ Matemáticas — $3^{\underline{o}}$ DT Matemáticas-Informática

Examen final de Topología — 7 de septiembre de 2010

	1	2	3	4	5	$\sum$
Apellidos:... **Nombre:...** **GRUPO:................**						

1.-[2 puntos] Define los siguientes conceptos:

(1.1) Interior de un conjunto.

(1.2) Aplicación continua entre dos espacios topológicos.

(1.3) Espacio topológico compacto.

(1.4) Retracto de deformación fuerte.

2.-[1,5 puntos] Considera la topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ en $X = \{a, b, c\}$ y la topología $\mathcal{T}^* = \{\emptyset, Y, \{u\}\}$ con $Y = \{u, v\}$.

(2.1) Escribe una base de la topología producto en $X \times Y$.

(2.2) ¿Es $\{(a, u), (b, u)\}$ cerrado en la topología producto de $X \times Y$.

(2.3) Sea $f : X \longrightarrow Y$ dada por $f(a) = u, f(b) = v$, y $f(c) = u$. ¿Es f continua?

3.-[2 puntos] Sea $A = (\{1\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{2\}) \subset \mathbb{R}^2$. Describe razonadamente el interior, la adherencia y la frontera de A como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con

(3.1) la topología usual,

(3.2) la topología lexicográfica.

4.-[2,5 puntos]

(4.1) (1 punto) Demuestra que todo espacio métrico es de Hausdorff.

(4.2) (1,5 puntos) Sea K un subconjunto compacto de un espacio topológico de Hausdorff $(X, \mathcal{T})$ y supongamos que $x \in X \setminus K$. Demuestra que existen $U, V \in \mathcal{T}$ con $U \cap V = \emptyset$ tal que $x \in U$ y $K \subset V$.

5.-[2 puntos] Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $x_0, y_0 \in X$ y α un camino en X entre x_0 e y_0. Se definen

$$\alpha_1(s) := \alpha\left(\frac{3}{4}s\right) \qquad \text{y} \qquad \alpha_2(s) := \alpha\left(\frac{1}{4}s + \frac{3}{4}\right), \quad 0 \leq s \leq 1$$

(5.1) Escribe $\alpha_1 * \alpha_2$ en función de α.

(5.2) Prueba que $\alpha_1 * \alpha_2$ es homótopo a α.