Universidad Autónoma de Madrid | Curso 2009-10
$2^{\underline{o}}$ Matemáticas | $3^{\underline{o}}$ DT Matemáticas-Informática
Examen final de Topología | 12 de junio de 2010

	1	2	3	4	5	$\sum$
Apellidos:.. **Nombre:**.. **GRUPO:**................						

1.-[2 puntos] Define los siguientes conceptos:

(1.1) Base de un espacio topológico.

(1.2) Frontera de un subconjunto.

(1.3) Propiedad de separación de Hausdorff.

(1.4) Propiedad topológica.

2.-[2 puntos] Estudia la compacidad de $\mathbb{N}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$ con las siguientes topologías:

(2.1) La topología cofinita.

(2.2) La topología discreta.

3.-[2 puntos] Sea $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Se consideran los espacios I con la topología usual e $I \times I$ con la topología del orden lexicográfico. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

(3.1) $f\colon I \to I \times I : t \mapsto f(t) = (t, 1/2)$.

(3.2) $g\colon I \to I \times I : t \mapsto g(t) = (1/2, t)$.

4.-[2 puntos] Decide si los siguientes espacios topológicos son homeomorfos (tienes que justificar que tienen cada una de las propiedades que utilices para distinguirlos. Si utilizas algún resultado visto en clase tienes que enunciarlo y justificar que se aplica al caso que tratas):

$X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(3,0)\}$.

$X_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(2,0)\}$.

$X_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

$X_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

5.-[2 puntos] Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(5.1) Sea $Y = [1,2] \cup (3,4] \subset \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{T}_<$ la topología del orden natural en Y. Sea T_Y la topología de subespacio (de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$) en Y. Entonces $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_<$.

(5.2) Sea X un conjunto. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ topologías sobre X con $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Sea $x \in X$ y $\mathcal{V}(x)$ un sistema de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$. Entonces $\mathcal{V}(x)$ es un sistema de entornos de x en $(X, \mathcal{T}')$.

(5.3) S^1 es un retracto de deformación fuerte de $\mathbb{R}^2$.

(5.4) Sean Y y X espacios topológicos. Sea $p\colon Y \to X$ una aplicación cociente. Entonces p es una función recubridora.