Universidad Autónoma de Madrid — Curso 2009-10
2º Matemáticas — 3º DT Matemáticas-Informática
Examen parcial de Topología. **Duración: 90 minutos** — 16 de abril de 2010

	1	2	3	4	5	$\sum$
Apellidos:.. **Nombre:...** **GRUPO:................**						

1.-[2 puntos]

(1.1) Dado un espacio topológico X y $A \subset X$. Define "la topología de subespacio sobre A".

(1.2) Dados dos espacios topológicos X e Y. Da una base de la topología producto sobre $X \times Y$".

(1.3) Dado un espacio topológico X y $A \subset X$. Define "$Int(A)$".

(1.4) Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Define "$(X, \mathcal{T})$ tiene la propiedad de separación de Hausdorff".

2.-[2 puntos] Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(2.1) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces $Int(A)$ es un abierto de $\mathcal{T}$.

(2.2) La topología $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ sobre $\mathbb{R}$ (que es la que tiene por base $\mathcal{B}_{\leftarrow} = \{(-\infty, b) \colon b \in \mathbb{R}\}$) es más fina que la topología usual sobre $\mathbb{R}$.

(2.3) La topología cofinita sobre $\mathbb{R}$ es menos fina que la usual sobre $\mathbb{R}$.

(2.4) El derivado del conjunto $\{1/n \colon n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ es $\{0\}$, con la topología usual sobre $\mathbb{R}$.

3.-[2 puntos] Se considera el espacio $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ con la topología de subespacio de la usual en $\mathbb{R}$. Se considera la siguiente relación de equivalencia:

$$\forall x, y \in X \qquad x \equiv y \iff \begin{cases} x = y \\ \text{ó} \\ x, y \in \{0, 1\} \end{cases}.$$

Identifica el conjunto cociente X^* con un subconjunto de X y da un sistema de entornos abiertos del punto $0 \in X^*$ con la topología cociente.

4.-[2 puntos] Sea $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por $f(x, y) = (y, x)$. Se consideran sobre $\mathbb{R}^2$ las siguientes topologías: la topología usual $\mathcal{T}_u$, la topología del orden lexicográfico $\mathcal{T}_{lex}$ y la topología cofinita $\mathcal{T}_{cof}$.

(4.1) Estudia si $f \colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{lex}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{lex})$ es continua.

(4.2) Estudia si $f \colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{lex})$ es abierta.

(4.3) Estudia si $f \colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cof}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cof})$ es un homeomorfismo.

5.-[2 puntos] Sean $X_1, X_2, \ldots, X_m$ espacios topológicos. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos del espacio producto $X = X_1 \times \cdots \times X_m$. Prueba que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $a \in X$ con la topología producto si y solamente si las sucesiones $\{p_i(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a $p_i(a)$ con la topología de X_i, para todo $i = 1, \ldots, m$ (donde p_i denota la proyección i-ésima: $p_i \colon X \to X_i$).