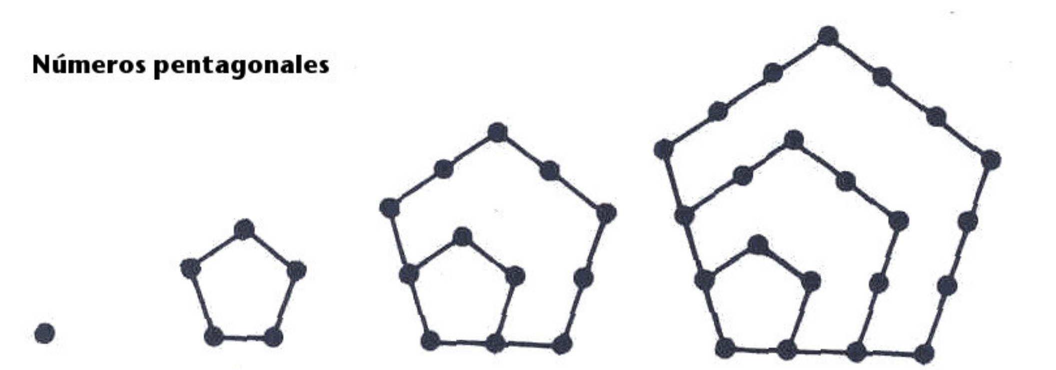
VISUALIZACIÓN EN MATEMÁTICAS -- CURSO 2009-10
EJERCICIOS

Los números como elementos gráficos

1. Siendo $T_n = 1 + 2 + ... + n$ el n-ésimo número triangular y $S_n = n^2$ el n-ésimo número cuadrado demuestra algebraica y visualmente las fórmulas:

a) $T_{n-1} + T_n = n^2$ b) $T_{2n} = 3T_n + T_{n-1}$ c) $1 + 8T_n = S_{2n+1}$ d) $T_{2n+1} = 3T_n + Tn + 1$

2. Si P_n es el n-ésimo número pentagonal haz una demostración visual $P_n = T_n + 2T_{n-1}$ y encuentra una fórmula para el n-ésimo número pentagonal.



3. Demuestra visualmente y por inducción las fórmulas

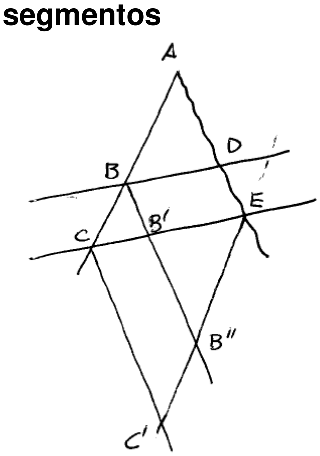
a) $1 + 2 + 3 + ... + n + (n-1) + ... + 3 + 2 + 1 = n^2$
b) $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) + (2n-3) + ... + 3 + 1 = n^2 + (n-1)^2$

4. Demuestra visualmente que la suma de las tres primeras potencias de nueve, es decir $9^0 + 9^1 + 9^2$, es un número triangular. Averigua una fórmula para calcular $\sum_{j=0}^{n} 9^j$ como un número triangular y demuéstrala por inducción.

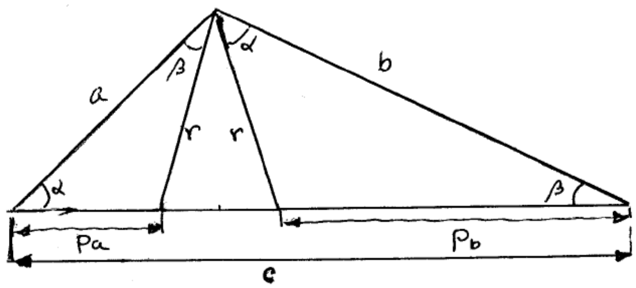
Los números como longitudes de segmentos

5. Usa el teorema de Thales demostrado en clase y ayúdate del dibujo de la derecha para demostrar que también se cumple:

$$\frac{BD}{EC} = \frac{AB}{AC}$$



6. Demuestra la siguiente generalización de los teoremas del cateto, de la altura y de Pitágoras para un triángulo como en la figura



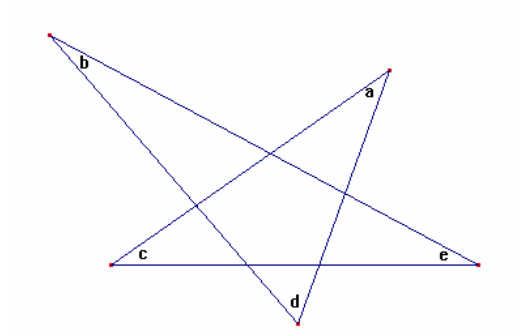
a) $r^2 = p_a p_b$

b) $a^2 = p_a c$

c) $b^2 = cp_b$

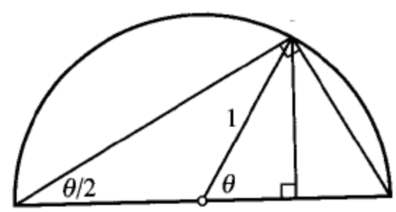
d) $a^2 + b^2 = c(p_a + p_b)$

7. Halla la suma de los ángulos interiores de una estrella de cinco puntas como la de la figura usando un argumento visual similar al usado para calcular la suma de los ángulos interiores de un triángulo.



8. Usa la figura de la derecha para ilustrar las siguientes fórmulas de la tangente del ángulo mitad:

$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$.



9. Presenta demostraciones visuales de las fórmulas del seno, del coseno y de la tangente de la diferencia de dos ángulos:

$$a)\,\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - cos\alpha\sin\beta$$

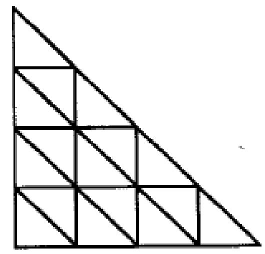
$$b)\,\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$c)\,\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

10. Demuestra visualmente la desigualdad de Bernouilli: para todo $x \geq -1$ y para todo a >1 se tiene $(1+x)^a \geq 1+ax$

Los números como áreas de figuras planas

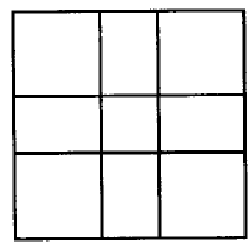
11. ¿Qué identidad para los enteros representa la figura de la derecha?



12. Comprueba que es cierta y demuestra visualmente usando áreas la identidad

$$F_{n+1}^2 = F_n^2 + F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_n$$

13. Usa la figura de la derecha para demostrar la identidad $F_{n+1}^2 = 4F_{n-1}^2 + 4F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-2}^2$



14. utiliza áreas para mostrar la fórmula para completar cuadrados:

$$x^2 + ax = (x + \frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2$$

15. Demuestra algebraica y visualmente que le producto de cuatro números enteros consecutivos es una unidad menos que un cuadrado perfecto.

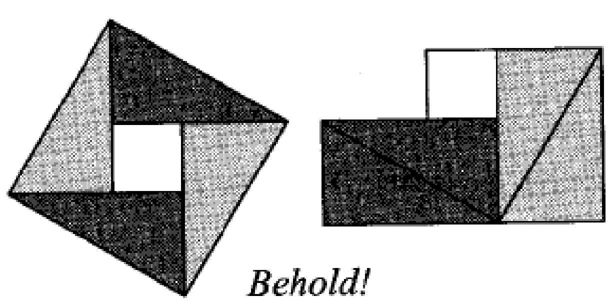
16. Halla una demostración con áreas de la siguiente propiedad: si p y q son positivos, entonces

$$\int_0^1 (t^{p/q} + t^{q/p})\, dt = 1$$

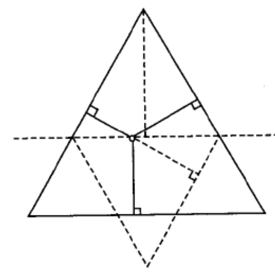
(Sugerencia: la inversa de $y=x^{p/q}$ es $x=y^{q/p}$)

Sobre triángulos y cuadriláteros

17. Utiliza isometrías para establecer otra prueba del teorema de Pitágoras siguiendo la figura que se adjunta atribuida al matemático hindú del siglo XII llamado Bhaskara.

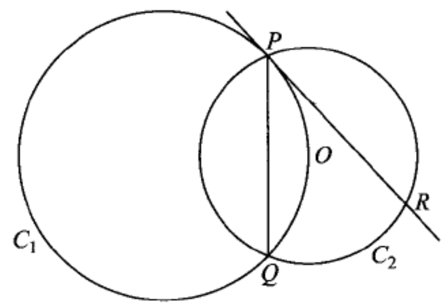


18. Explica por qué la figura de la derecha da otra demostración del teorema de Viviani

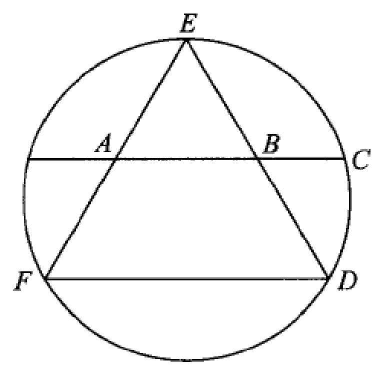


19. Halla el área de un octógono convexo inscrito en una circunferencia que tiene cuatro lados consecutivos de longitud 3 y los otros cuatro lados de longitud 2 (Indicación: Divide el octógono en 8 triángulos usando el centro de la circunferencia y reordena los triángulos alternando los que tienen lados 2 y 3. Fíjate que el nuevo octógono lo puedes inscribir en un cuadrado)

20. El círculo C_1 pasa por el centro O del círculo C_2 como se muestra en la figura. Demuestra que la longitud de la cuerda común PQ es igual a la longitud del segmento tangente PR. (Indicación: si S es el centro del círculo C_1 dibuja los triángulos PSQ y POR y trata de buscar triángulos congruentes)



21. Sean A y B los puntos medios de los lados EF y ED de un triángulo equilátero DEF inscrito en una circunferencia. Extiende AB hasta cortar a la circunferencia en C y en C' (no señalado). Demuestra que B divide a AC según el número de oro $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (Indicación: prueba que los triángulos C'EB y BCD son congruentes)



22. Demuestra que si una recta corta a una rama de la hipérbola xy=1 en dos puntos A y B, esta recta interseca a los ejes en puntos A' y B' tal que la longitud de los segmentos AA' y BB' es la misma.

23. Si K, a, b, c y R denotan, respectivamente, el área, las longitudes de los lados y el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo, demuestra que

$$K = \frac{abc}{4R}$$

(Indicación: prueba que los triángulos sombreados de la figura son semejantes y que K= hc/2)