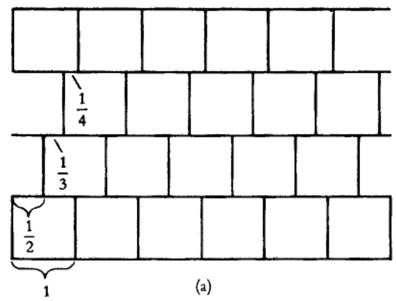
11. MOSAICOS

Cuando una o varias piezas recubren un plano sin solaparse tenemos un **recubrimiento o mosaico**. Los mosaicos más sencillos son los que solo utilizan una pieza de una única forma y tamaño. Aun más sencillos son los que utilizan una sola pieza que sea un polígono regular.

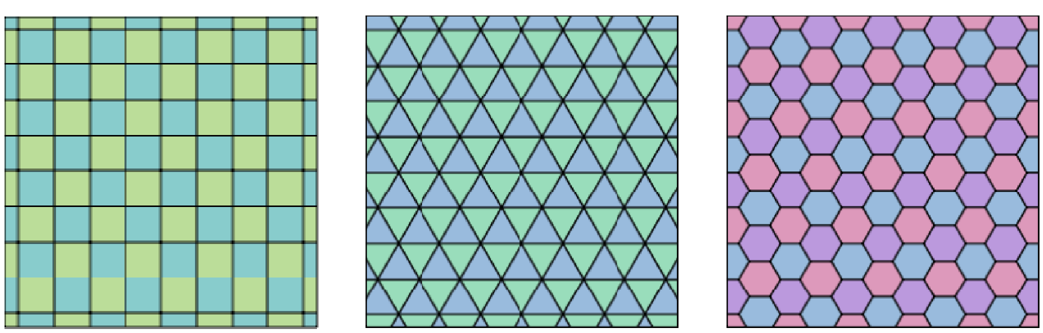


El de la derecha es un mosaico con cuadrados que no vamos a permitir. Queremos que recubran el plano **arista a arista**: es decir, cada arista de una pieza coincide exactamente con alguna arista de piezas adyacentes.

El ángulo interior de un polígono regular de n lados es

$$180-\frac{360}{n}=180(1-\frac{2}{n})$$

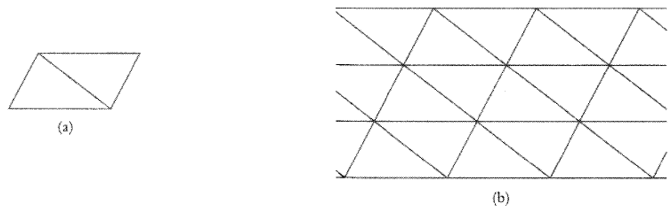
Ejercicio 16. Demuestra que los únicos polígonos regulares que pueden formar mosaicos (arista a arista) son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular.



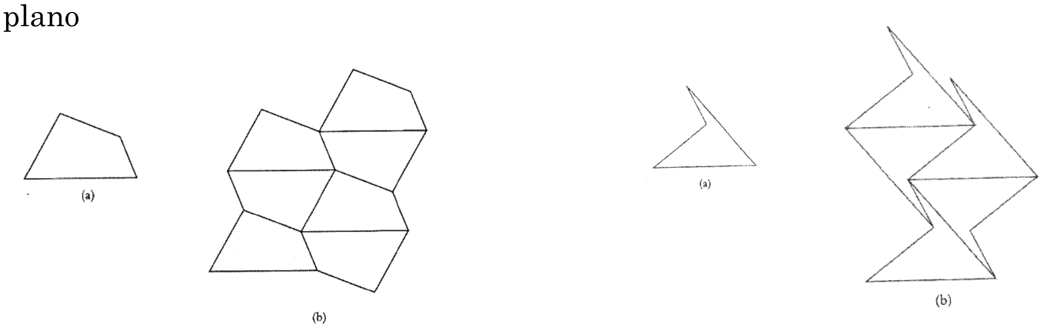
Las imágenes en color de esta presentación están tomadas de Wikipedia y el resto son del libro Matemáticas en la Vida Cotidiana.

Mosaicos arista a arista con polígonos irregulares

Ejemplo 11. Cualquier triángulo produce un mosaico en el plano.

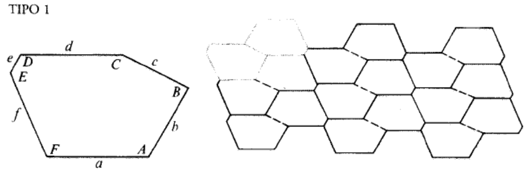


Ejemplo 12. Cualquier cuadrilátero (convexo o no) produce un mosaico en el plano



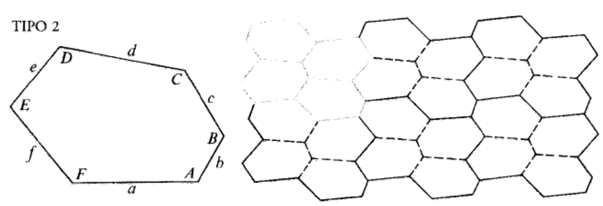
Podría pensarse que la situación es la misma para hexágonos convexos. K. Reinhart demostró en su tesis doctoral de 1918 que para que un hexágono convexo pueda recubrir el plano debe pertenecer a una de las tres clases de la figura que sigue y que todo hexágono de este tipo formará un mosaico.

TIPO 1



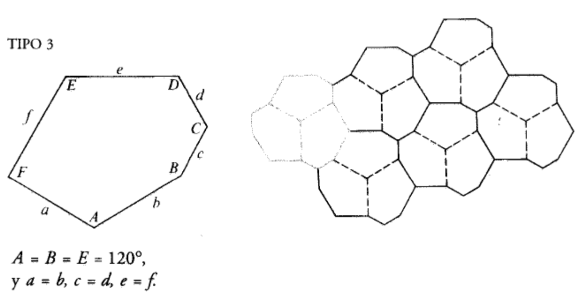
$A + B + C = 360°$,
y $a = d$.

TIPO 2



$A + B + D = 360°$,
y $a = d$, $c = e$.

TIPO 3



$A = B = E = 120°$,
y $a = b$, $c = d$, $e = f$.

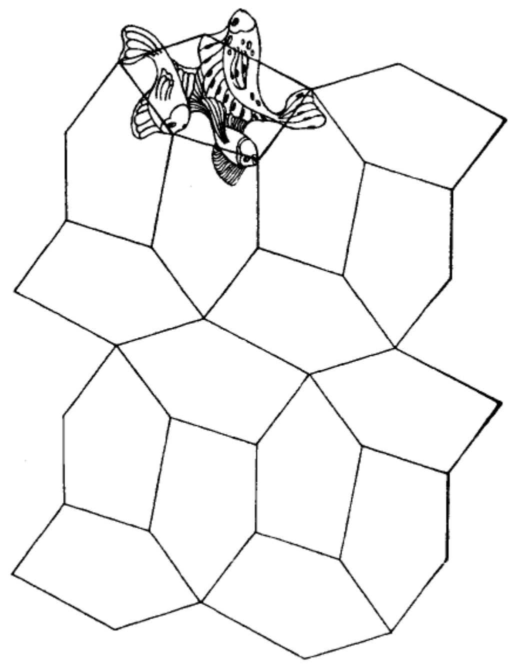
En 1927, K. Reinhart demostró que con un polígono convexo P(n) (no necesariamente regular) con n mayor o igual que 7 nunca se pude hacer un mosaico (arista a arista)

En su tesis, K. Reinhart encontró **cinco tipos** de pentágonos convexos que servían para hacer mosaicos, pero no pudo demostrar que no había mas. En 1968, R.B. Kesner, físico de la Universidad de Johns Hopkins, descubrió **tres clases** más de pentágonos convexos que formaban mosaicos. Creía que estos ocho tipos eran todos pero no pudo demostrarlo.

Cuando se relató la historia en Scientific American (julio 1975) ¡un matemático aficionado encontró un **noveno** tipo! Otra aficionada, Marjorie Rice, ama de casa y sin mas educación matemática que el bachillerato que había estudiado hacia 36 años, diseño su propia notación y encontró **cuatro nuevos tipos** (uno de ellos puede verse en la figura de la derecha).

Un nuevo tipo, el **decimocuarto**, fue encontrado por un estudiante de doctorado en matemáticas en 1985.

Nadie ha sido capaz de encontrar uno nuevo, ni demostrar que ya no hay más.



Malla subyacente en el dibujo «Peces» de Marjorie Rice, basado en uno de sus singulares recubrimientos con pentágonos.

11.1 Mosaicos regulares con una pieza poligonal

Todo mosaico en un plano puede considerarse como un grafo infinito. Un mosaico se dice **regular de orden k** si el grafo asociado tiene todos sus vértices de grado k.

Si pensamos en el mosaico como un grafo que va creciendo tendremos vértices en el borde y vértices en el interior del grafo. Sea b el número de vértices en el borde y V el número total de vértices en el grafo. Nosotros supondremos que los vértices totales del grafo dominan a los del borde, es decir:

$$\lim_{V\to\infty} \frac{b}{V} = 0 \quad (1)$$

TEOREMA 1. Sea P(n) un polígono (no necesariamente regular) que produce un mosaico regular de orden k suponiendo que se cumple (1). Entonces se ha de tener (k-2)(n-2)=4.

COROLARIO 2. Sea P(n) un polígono (no necesariamente regular) que produce un mosaico regular de orden k suponiendo que se cumple (1). Entonces solo podemos tener k=3, 4 ó 6 y los polígonos solo pueden ser hexágonos (n=6), cuadriláteros (n=4) o triángulos (n=3). Ver los tres mosaicos en la página 1.

Nota: Observa que el recubrimiento de Marjorie Rice (página 3) se hace con una sola pieza pentagonal, pero no es regular porque tiene vértices de grados 3 y 4.

11.2 Mosaicos regulares con dos tipos de piezas poligonales

Queremos averiguar qué mosaicos regulares de orden k pueden existir permitiendo dos tipos de piezas poligonales P(n) y P(m) con n<m. Usaremos la notación M(k; n,m) para denotar uno de estos mosaicos y MPR(k;n,m) si los mosaicos son de orden k y se hacen con polígonos regulares.

Ejercicio 1. Suponiendo que se cumple (1) haz un recuento de vértices (V) y de aristas (A) en un trozo finito de un mosaico del tipo M(k;n,m), con n<m, para probar que

$$\lim_{V\to\infty} \frac{A}{V} = \frac{k}{2} \tag{2}$$

Ejercicio 2. Sea C(n) el número de piezas P(n) y C(m) el número de piezas P(m) de un mosaico del tipo M(k;n,m), con n<m, que satisface (1). Haciendo un recuento de caras y aristas en un trozo finito del mosaico demuestra que

$$\lim_{V\to\infty} \frac{nC(n)+mC(m)}{V} = k \tag{3}$$

Ejercicio 3. En un mosaico del tipo M(k;n,m), con n<m, que satisface (1) usa la fórmula de Euler sobre un trozo finito del mosaico (contando la cara exterior) para demostrar que

$$\lim_{V\to\infty} \frac{C(n)+C(m)}{V} + 1 = \frac{k}{2} \tag{4}$$

Vamos a suponer que en el mosaico M(k:n,m) hay s caras C(n) por una cara C(m), es decir

$$\lim_{V\to\infty} \frac{C(n)}{V} = s \lim_{V\to\infty} \frac{C(m)}{V} \tag{5}$$

Ejercicio 4. En un mosaico del tipo M(k;n,m), con n<m, que satisface (1) y (5) usa los ejercicios anteriores para demostrar que

$$ns + m = \frac{2k}{k-2}(s+1) \tag{6}$$

PROPOSICIÓN 3. En un mosaico M(k;n,m) regular de orden k con piezas poligonales P(n) y P(m), con n<m, que satisface (1) y (5), k solo puede tomar los valores 3, 4 ó 5.

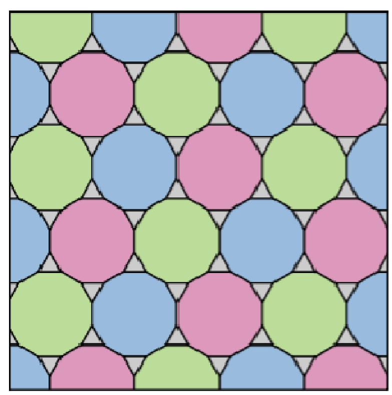
A la vista de la proposición 3 tenemos que analizar los casos k = 3, 4 ó 5.

11.2.1 Caso k=3

Para el caso k=3 la ecuación del ejercicio 4 se transforma en ns+m = 6 (s+1)

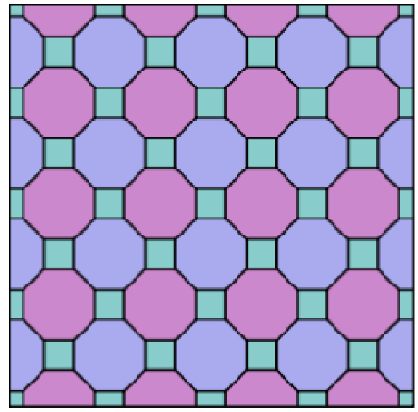
Ejercicio 5. En un mosaico M(3;n,m) con las condiciones de la proposición 3 demuestra que n = 3, 4 ó 5.

Ejercicio 6. **(k=3, n=3)** Prueba que en un mosaico con dos polígonos regulares del tipo MPR(3;3,m) se debe tener m=12 debiéndose juntar un triángulo y dos dodecágonos en cada vértice. (Un ejemplo de este tipo de mosaico es el de la figura de la derecha, también descrito como 3-12-12 porque en cada vértice se juntan un triángulo y dos dodecágonos)



Mosaico 3-12-12

Ejercicio 7. (k=3, n=4) Prueba que en un mosaico con dos polígonos regulares del tipo MPR(3;4,m) se debe tener m=8, debiéndose juntar un cuadrado y dos octógonos en cada vértice (Un ejemplo de este tipo de mosaico es el de la figura de la derecha, también descrito como 4-8-8 porque en cada vértice se juntan un cuadrado y dos octógonos)



Mosaico 4-8-8

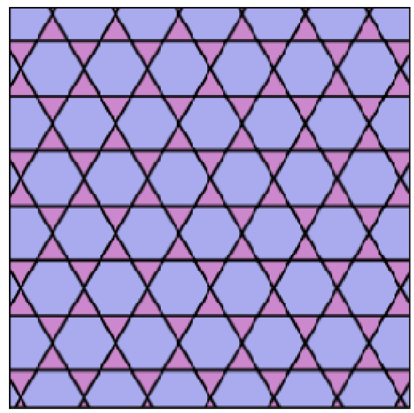
Ejercicio 8 (k=3, n=5) Demuestra que no hay mosaicos con dos polígonos regulares del tipo MPR(3;5,m). (En este ejercicio encontrarás que la configuración 5-5-10 es posible alrededor de un vértice, pero luego puedes darte cuenta de que no se puede construir un mosaico (de hecho: en un mosaico regular de la forma N-P-Q si N es impar, P y Q deben ser iguales)

11.2.2 Caso k=4

Para el caso k=4 la ecuación del ejercicio 4 se transforma en $ns+m = 4\,(s+1)$

Ejercicio 9. En un mosaico M(4;n,m) con las condiciones de la proposición 3 demuestra que n=3.

Ejercicio 10. **(k=4, n=3)** Prueba que en un mosaico con dos polígonos regulares del tipo MPR(4;3,m) se debe tener m=6 debiéndose juntar dos triángulos y dos hexágonos en cada vértice. (Un ejemplo de este tipo de mosaico es el de la figura de la derecha, también descrito como 3-6-3-6 porque en cada vértice se juntan dos triángulos y dos hexágonos en el orden circular indicado)



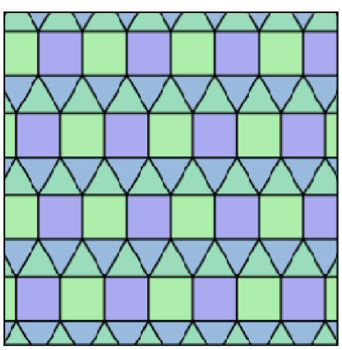
Mosaico 3-6-3-6

11.2.3 Caso k=5

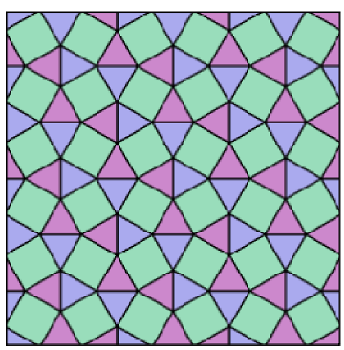
Para el caso k=5 la ecuación del ejercicio 4 se transforma en $ns+m = (10/3)(s+1)$

Ejercicio 11. En un mosaico M(5;n,m) con las condiciones de la proposición 3 demuestra que n=3.

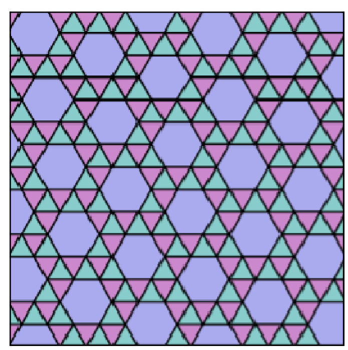
Ejercicio 12. (k=5, n=3) Prueba que en un mosaico con dos polígonos regulares del tipo MPR(5;3,m) se debe tener m=4 (juntándose 3 triángulos y dos cuadrados en cada vértice) ó m=6 (juntándose 4 triángulos y 1 hexágono en cada vértice (del primer caso se pueden construir dos variantes, la 3-3-3-4-4 y la 3-3-4-3-4; del segundo caso solo se puede construir la 3-3-3-3-6)



3-3-3-4-4



3-3-4-3-4



3-3-3-3-6

11.3. Mosaicos regulares con más de dos piezas poligonales regulares

Se puede hacer un estudio similar al realizado en la sección 11.2 para encontrar todos los mosaicos con más de dos piezas poligonales regulares. Estos son los pasos que pueden darse.

Ejercicio 1 para entregar. Haz un recuento de ángulos en un vértice para probar que no existen mosaicos con cuatro o más polígonos regulares distintos que se junten en un vértice.

Ejercicio 2 para entregar. En un mosaico regular con tres polígonos regulares distintos no puede haber dos polígonos regulares de n lados juntos en un mismo vértice si n > 4.

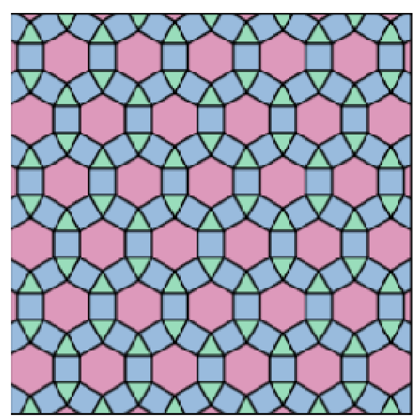
Ejercicio 3 para entregar. En un mosaico regular del tipo MPR(k; n,m,q), con n < m < q, solo podemos tener n=3 ó n=4.

PROPOSICIÓN 4. En un mosaico M(k;n,m,q) regular de orden k con piezas poligonales P(n), P(m) y P(q), con n<m<q, el orden k solo puede tomar los valores 3, 4 ó 5.

(Nota: en la proposición 4 hay que sustituir la condición (5) de la proposición 3 por una adecuada al nuevo contexto. La demostración es similar a la de la proposición 3.)

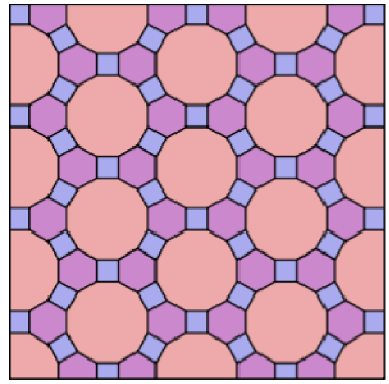
No existen mosaicos regulares del tipo MPR(5; n,m,q), es decir de orden 5.
(Nota: hacer recuento de ángulos en un vértice usando los ejercicios anteriores)

En un mosaico MPR(4; n,m,q) regular de orden 4 un recuento de ángulos permite las combinaciones 3-3-4-12 y 3-4-4-6. Con la combinación 3-3-4-12 no es posible construir un mosaico regular. Con la otra combinación es posible construir un mosaico con la ordenación circular 3-4-6-4 (ver la figura de la derecha)



Mosaico 3-4-6-4

En un mosaico MPR(3;n,m,q) pueden darse varias combinaciones al hacer el recuento de vértices, pero solo una de ellas puede construirse y es la combinación 4-6-12 (ver figura de la derecha)



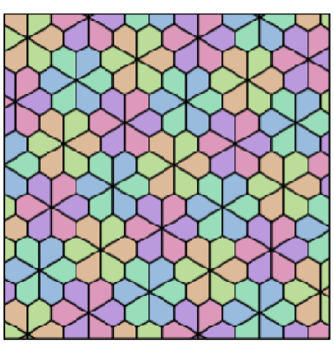
Mosaico 4-6-12

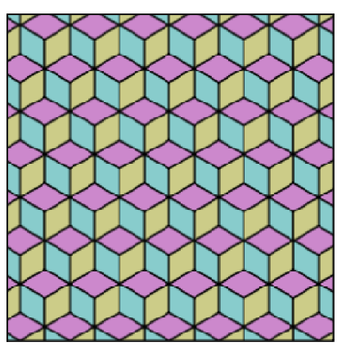
De todo este estudio se deduce que **solo hay 11 mosaicos regulares con polígono regulares**: tres de ellos son los de la figura de la página 1 y los 8 restantes están dados en el resto de las figuras de color.

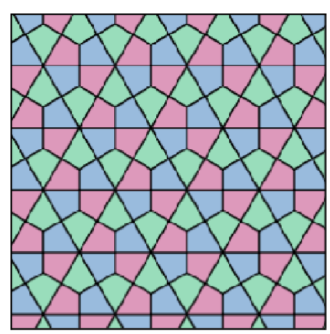
11.4. Mosaicos duales

En las secciones anteriores se ha realizado el estudio de mosaicos regulares de orden k. Todo mosaico regular de orden k da lugar a otro mosaico del plano tomando su grafo dual. Por ejemplo los recubrimientos con triángulos equiláteros y hexágonos regulares son duales entre sí, y el recubrimiento con cuadrados es su mismo dual.

Para los mosaicos del tipo MPR(k; n,m) que tienen k aristas en cada vértice con polígonos regulares P(n) y P(m), con n < m, de los que hemos visto en la sección 11.2 que hay solamente 6 tipos, se obtienen mosaicos con una sola pieza poligonal de k lados, no necesariamente regular, y con vértices en los que se juntan n ó m aristas: M(n,m;k). Debajo se dan algunos ejemplos: trata de averiguar de cuales son duales.

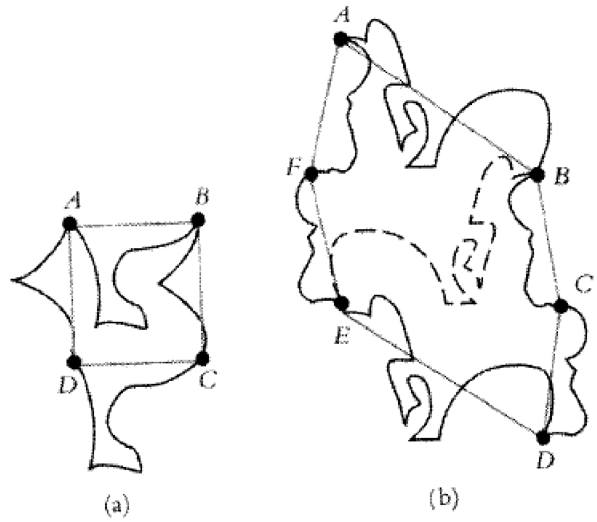






11.5 Mosaicos planos y dibujos de Escher

M. C. Escher realizaba sus dibujos a partir de mosaicos planos. En la figura de la derecha se dan dos ejemplos. En la de la izquierda a partir de un cuadrado se obtiene un pájaro y en la de la derecha a partir de un hexágono que recubre el plano se obtienen dos caballeros con sus caballos.



Debajo se indica como hacer una cabeza de un caballo a partir de un par-hexágono que recubre el plano y como queda el mosaico del plano.

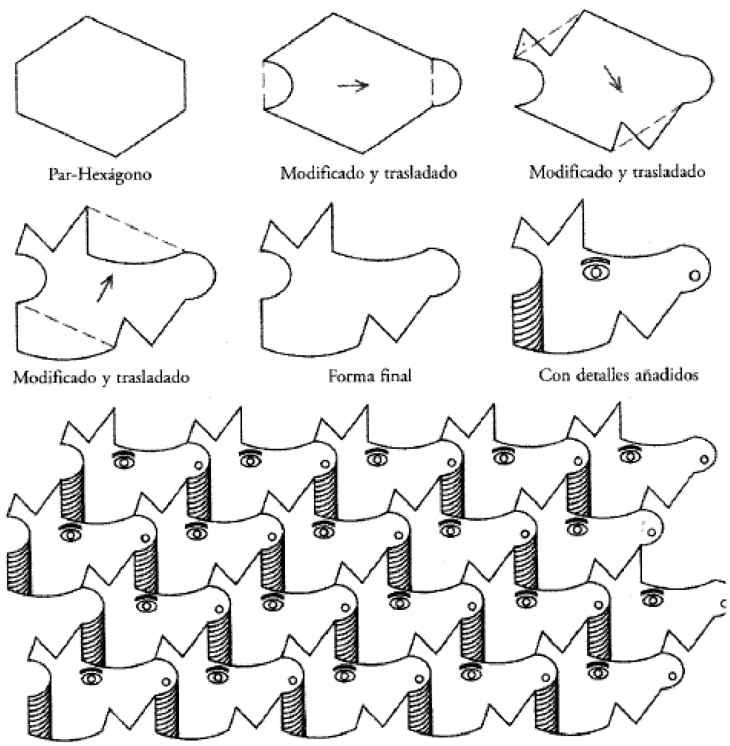


Figura 22.12 Cómo hacer, comenzando con un par-hexágono, un recubrimiento por traslaciones semejante a los de Escher. (Adaptado de Dale Seymour y Jill Britton, *Introduction to Tessellations*, Dale Seymour Publications, Palo Alto, California, 1989, página 137.)