10. COLOREADO DE GRAFOS

Ejemplo 8. Horario de exámenes finales. Tenemos que hacer un horario para realizar siete exámenes finales, Numeramos las asignaturas de 1 a 7. Hay alumnos matriculados en varias asignaturas a la vez, como se indica en la tabla siguiente. Tenemos la restricción de que un alumno no puede hacer dos exámenes el mismo día ¿Cuál es el menor número de días que se deben usar para hacer el horario?

1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
1-3	2-4	3-6	4-6	5-7	
1-4	2-5	3-7			
1-7	2-7				

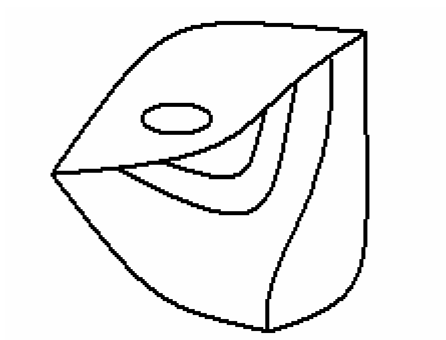
Ejemplo 9. Asignación de frecuencias de emisión de canales de televisión. Seis estaciones de televisión están situadas en una región en lugares cuya distancia entre ellos se indica en la tabla adjunta. Dos emisoras no pueden emitir en la misma frecuencia si están a menos de 150 km de distancia entre sí. ¿Cuántas frecuencias distintas se necesitan?

	1	2	3	4	5	6
1		85	175	200	50	100
2			125	175	100	160
3				100	200	250
4					210	220
5						100
6						

Definición. El mínimo número de colores necesario para colorear los vértices de un grafo G se llama **número cromático** de G y se escribe χ(G).

NOTA: El grafo completo K_n necesita exactamente n colores para ser coloreado.

Ejemplo 10. Construye el grafo dual del mapa siguiente y encuentra el mínimo número de colores necesarios para colorear el mapa de manera que dos regiones con el mismo color no tengan frontera común.



GRAN TEOREMA (El teorema de los cuatro colores)
El número cromático de un grafo plano es menor o igual que 4

Historia. Francis Guthrie, estudiante de Augustus de Morgan, se dió cuenta de que bastaban 4 colores para colorear un mapa de los condados de Inglaterra. **Aquí nació la conjetura.** De Morgan hizo publicidad del problema entre los matemáticos.

El gran teorema fue demostrado por Kenneth Appel y Wolfgang Haken (EEUU) en 1976. En su demostración fue necesario usar el ordenador para examinar 2000 configuraciones diferentes de mapas, a los que habían reducido el problema. Necesitaron 1000 horas de ordenador.

Se han dado varias pruebas incorrectas del teorema de los cuatro colores. La más famosa la del abogado inglés Alfred Kempe que la publicó en 1879 y fue aceptada como correcta por los matemáticos hasta que en 1890 Pearcy Heawood encontró un error en la demostración.

PEQUEÑO TEOREMA (El teorema de los cinco colores)
El número cromático de un grafo plano es menor o igual que 5

Para probar el teorema de los 5 colores necesitamos algunas consecuencias de la mágica fórmula de Euler: $C + V = A + 2$ en todo grafo plano conexo contando la cara exterior.

COROLARIO 1. Si G es un grafo plano conexo con V vértices y todas sus caras son de tipo poligonal con 3 o más aristas, se tiene $A \leq 3V - 6$.

Demostración. Lamemos grado de una cara al número de aristas que bordea a la cara. Por hipótesis el grado de cada cara es mayor o igual que 3. Como cada cara comparte dos aristas se tiene $2A \geq 3C$. Usando la fórmula de Euler

$$A + 2 = C + V \leq \frac{2}{3} A + V \Leftrightarrow A \leq 3V - 6$$

COROLARIO 2. Si G es un grafo plano conexo y todas sus caras son de tipo poligonal con 3 o más aristas, G tiene al menos un vértice de grado menor o igual a 5

Demostración. Por el corolario 1, $2A \leq 6V - 12$. Si todos los vértices tuvieran grado mayor o igual que 6 se tendría $2A \geq 6V$, que contradice la fórmula anterior.

Ejercicio 14. Utiliza el Corolario 1 para demostrar que el grafo completo K_5 no es plano.

PEQUEÑO TEOREMA (El teorema de los cinco colores)
El número cromático de un grafo plano es menor o igual que 5

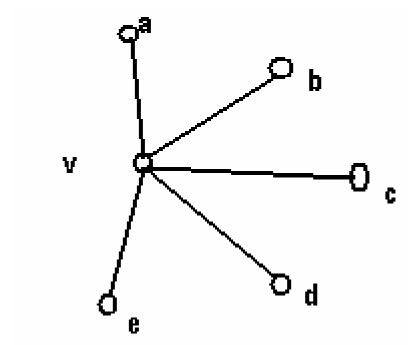
Demostración. Procedemos por inducción en el número V de vértices del grafo G. Si $V \leq 5$ el resultado es claro. Siempre se puede suponer que las caras del grafo son de tipo poligonal con 3 o más aristas. Por el corolario 2 tiene que existir en G un vértice *v* de grado menor o igual que 5. Consideremos el grafo G-{v} al que hemos quitado el vértice v y todas las aristas que llegan a v. El grafo G-{v} tiene V-1 vértice y por la hipótesis de inducción se puede colorear con 5 colores 1, 2, 3, 4 y 5.

Si el grado de v fuera menor o igual que 4 usamos un color no usado en los vértices adyacentes a v y tenemos colorado G con 5 colores como máximo. Si el grado de v es 5 y los vértices adyacentes a v solo utilizan 4 colores, nos sobra un colore en la paleta de colores para colorear v.

La dificultad aparece si el grado de v es igual a 5 y se han usado 5 colores para colorear sus vértices adyacentes. En este caso, mostraremos que puede hacerse un nuevo coloreado de G-{v} que permita dejar libre un color para colorear v.

Llamemos a, b, c, d y e a los cinco vértices adyacentes a v y ordenados según el giro de las agujas del reloj.

Considerar los vértices a y d y definir $V_{a,d}$ el conjunto de vértices de G-{v} que tienen el mismo color que a o que d. Es claro que a y de son vértices que perteneces a $V_{a,d}$.



Puede suceder:

CASO 1. Hay un camino desde a hasta d en el grafo G-{v} que utiliza solo vértices de $V_{a,d}$.

CASO 2. No existe un camino como el descrito en el caso 1

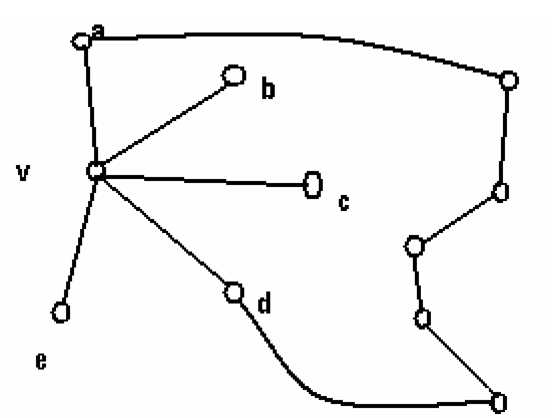
CASO 2. Sea $V'_{a,d}$ el conjunto de vértices s de G-{v} para los que hay un camino de a a s usando solamente vértices de $V_{a,d}$. Es claro que d no pertenece a $V'_{a,d}$. En este caso definir un nuevo colorado de G-{v} asi:

$$c'(s) = c(s) \text{ si s no está en } V'_{a,d}$$
$$c'(s) = c(d) \text{ si s está en } V'_{a,d} \text{ y } c(s)=c(a)$$
$$c'(s) = c(a) \text{ si s está en } V'_{a,d} \text{ y } c(s)=c(d)$$

(Es decir, intercambiamos lo colores en el conjunto $V'_{a,d}$)

Ya solo quedan 4 colores alrededor de v porque ahora c(a)=c(d) y por tanto nos queda libre el color de a para asignárselo a v.

CASO 1. Hay un camino P de a hasta d con vértices en $V_{a,d}$. En este caso miramos a los vértices b y e. Los conjuntos $V_{b,e}$ y $V_{a,d}$ son disjuntos. El camino P con las aristas {v,a} y {v,d} forman un ciclo. Uno de los vértices b o e está dentro de este ciclo (en el dibujo el b).



En estas circunstancias no puede haber un camino entre b y e porque tendría que usar un vértice de $V_{a,d}$ y no es posible porque los conjuntos $V_{a,d}$ y $V_{b,e}$ son disjuntos.

Ahora b y e están en la situación del caso 2 en donde ya hemos explicado como se pueden cambiar los colores para que v pueda ser coloreado si usar más de cinco colores.

No hay ningún algoritmo eficiente para colorear vértices de grafos. A continuación presentamos uno simple que consiste en comenzar coloreando los vértices de mayor grado. No siempre produce el mejor coloreado.

ALGORITMO PARA COLOREAR VÉRTICES

1. Hacer un lista de vértices según el orden de su grado, de mayor a menor:

grado(v1) ≥ grado(v2) ≥ ....≥ grado (vn)

Se elige una ordenación cuando dos vértices tienen igual grado.

2. Asignar a v1 el color 1, así como todos los vértices de la lista, en orden, que no sean adyacentes a uno coloreado con el color 1.

3. Asignar el color 2 al primer vértice de la lista que no haya sido coloreado con el color 1. Seguir coloreando con el color 2 los vértices de la lista no coloreados que no sean adyacentes a vértices con el color 2.

4. Continuar hasta que se hayan agotado todos los vértices.

Ejercicio 14. Colorea los vértices del siguiente grafo con este algoritmo ¿Cuántos colores se han necesitado? ¿Es éste el mínimo número de colores con los que se pueden colorear los vértices del grafo?