LAS CIENCIAS DE LA PLANIFICACIÓN

5. EL PROBLEMA DEL VIAJANTE (PV)
(The Traveling Salesman Problem – TSP)

Un problema como el de las vacaciones, pero vital para las empresas, es el **problema del viajante** (PV): encontrar un recorrido económico por todas las ciudades que debe recorrer un viajante (sólo puede pasar una vez por cada ciudad y regresar a su punto de partida).

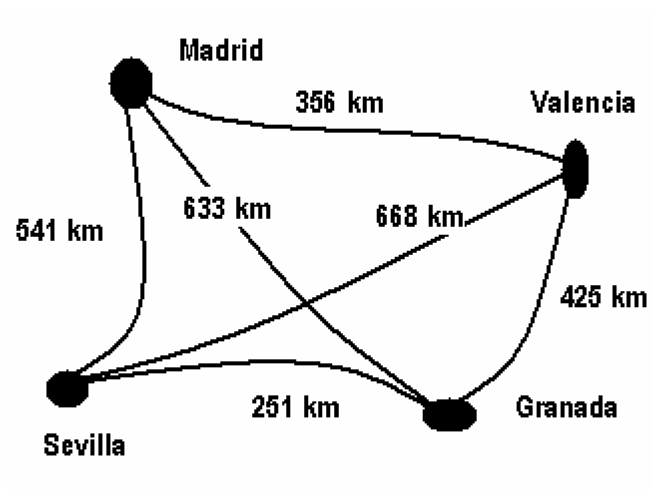
Ejemplos: Recogida de monedas de la cabinas telefónicas.
Diseño de rutas de autobuses para un colegio.
Reparto de suministros a los supermercados.

El método de escribir todos los posibles circuitos y elegir el de coste mínimo es inviable si hay muchas ciudades. Se han diseñado varias estrategias para resolver este problema.

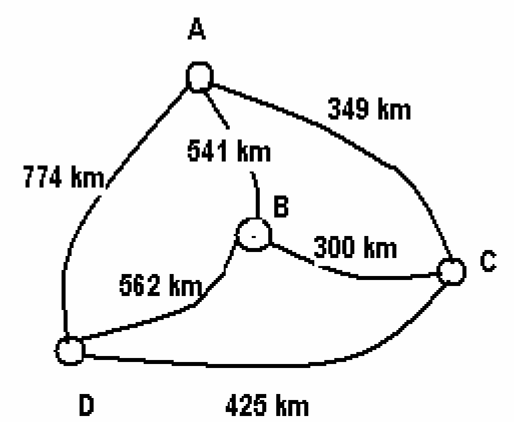
5.1. EL ALGORITMO DEL VECINO MÁS CERCANO

Descripción: El grafo debe ser completo y valorado. Comenzar en un vértice. En cada vértice del grafo visitar a continuación el vértice “más cercano” (aquél cuya arista tenga menor valor) que no se haya visitado anteriormente. Regresamos al vértice del comienzo cuando no hay más posibilidades.

Ejemplo 2. En el ejemplo 1 de la ruta de vacaciones usa el algoritmo del vecino más cercano para encontrar un ciclo hamiltoniano. ¿Es este el ciclo hamiltoniano de coste mínimo?



Ejemplo 3. En el grafo valorado siguiente aplica el algoritmo del vecino más cercano comenzando en C. ¿Es este el recorrido más económico?



Hacer el algoritmo del vecino más cercano comenzando en cada uno de los otros vértices. Observa que un ciclo que comience en otro vértice puede hacerse que comience en C con el mismo coste. ¿Produce alguno de estos ciclos la solución óptima?

5.2. EL ALGORITMO DE LAS ARISTAS CLASIFICADAS

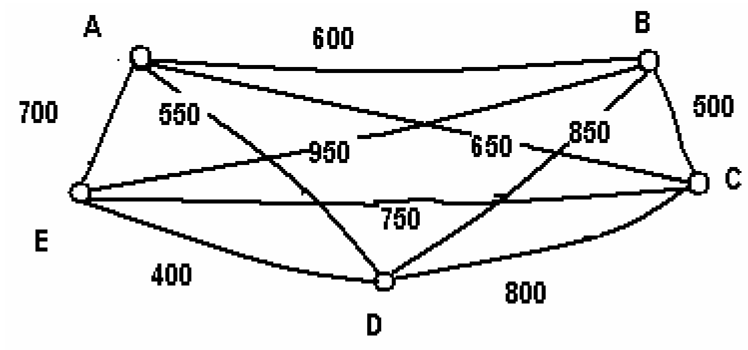
Descripción: Ordenar los valores de las aristas de menor a mayor. En cada paso seleccionar la arista de menor valor que satisfaga:

(1) Nunca se juntan 3 aristas seleccionadas en un vértice (porque un ciclo hamiltoniano solo usa dos aristas de cada vértice)

(2) Nunca cerrar un camino que no incluya todos los vértices.

Ejemplo 4. Para los grafos valorados de los ejemplos 2 y 3 halla un ciclo hamiltoniano usando el algoritmo de las aristas clasificadas. ¿Produce este algoritmo un ciclo de coste mínimo?

Ejemplo 5. Usa el algoritmo de las aristas clasificadas para encontrar un ciclo hamiltoniano en el grafo valorado siguiente:



Ejercicio para practicar nº 4. Elige 7 ciudades o pueblos de España. Mira en un mapa de carreteras y construye el grafo valorado que represente las distancias por carretera entre estas 7 ciudades o pueblos. Halla ciclos hamiltonianos usando

a) El método del vecino más cercano para cada ciudad
b) Es método de las aristas clasificadas

De todos los calculados elige el que produzca el mejor resultado.

6. **GRAFOS Y ÁRBOLES**

Ejemplo 6. (Construcción de una red para videoconferencias) Se quiere poner cables de fibra óptica entre 5 ciudades A, B, C, D y E para conexión por videoconferencia. La compañía evalúa el coste de establecer una línea directa entre dos ciudades y obtiene los valores de la siguiente tabla dados en Millones de Euros.

	A	B	C	D	E
A		7	13	6	6,5
B			16	15	12
C				7,5	14
D					5
E					

Dibuja a la derecha de la tabla el grafo valorado correspondiente a este ejemplo.

El **problema** consiste en dar servicio a todas las ciudades de manera que el coste de la construcción de las comunicaciones sea el menor posible.

Observa: No es necesario construir todas las conexiones. No hay que formar circuitos: en cualquier circuito si se elimina una arista el servicio está garantizado a todas las ciudades.

Algoritmo de Kruskal (1954)

Ordenar los valores de las aristas de menor a mayor. En cada paso seleccionar la arista de menor valor que satisfaga:

(1) Nunca se forme un circuito.
(2) Se termina cuando todos los vértices estén conectados.

Ejercicio 7. Aplica el algoritmo de Kruskal al problema del ejemplo 6 para decidir sobre la construcción de una red de videoconferencia.

CONCEPTOS

Un **árbol** es un grafo en el que no hay circuitos

Un **árbol generador** de un grafo es un árbol que contiene a todos los vértices del grafo.

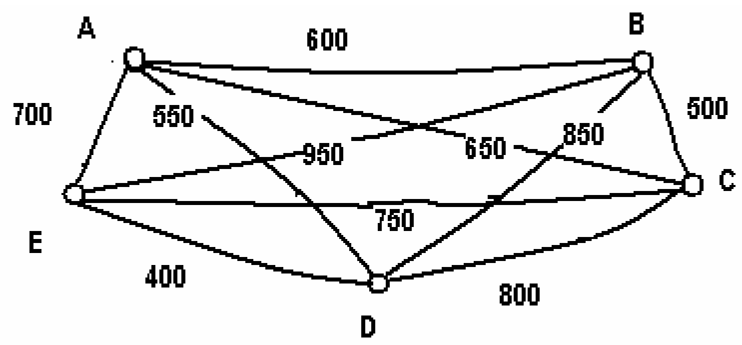
En un grafo valorado, un **árbol generador de coste mínimo** es un árbol generador en el que la suma de los valores de sus aristas es la menor posible de entre todos los árboles generadores del grafo.

Teorema (Kruskal, 1954) En un grafo conexo valorado, el algoritmo de Kruskal produce siempre un árbol generador de coste mínimo.

Ejercicio 8. Halla el árbol generador de coste mínimo para el problema de construir un oleoducto entre Madrid, Barcelona, Sevilla y Valencia descrito en el ejemplo 3 de la sección 1.

7. DE NUEVO EL PROBLEMA DEL VIAJANTE

Ejemplo 7. En el ejemplo 5 se pidió encontrar un ciclo hamiltoniano usando el algoritmo de las aristas clasificadas. Este procedimiento no tiene que producir el ciclo hamiltoniano de coste mínimo, asi que tenemos una **cota superior** para el coste mínimo en este problema del viajante. Usa el algoritmo del vecino más cercano comenzando en cada uno de los vértices para encontrar otras cotas superiores del ciclo hamiltoniano de coste mínimo del ejemplo 5.



En el problema anterior se han obtenido cotas superiores para resolver el problema del viajante. El algoritmo de las aristas clasificadas daba un valor de 2.800, que también es cota superior del valor mínimo. El algoritmo de Kruskal permite obtener una cota superior y una cota inferior del valor mínimo.

Sea K un árbol construido en un grafo valorado G mediante el algoritmo de Kruskal y c(K) su coste. Si H es el ciclo hamiltoniano de valor mínimo de G se tiene

$$c(K) \leq c(H) \leq 2c(K)$$

Ejercicio 9. Usa el algoritmo de Kruskal para hallar una cota inferior y una cota superior para valor del ciclo hamiltoniano mínimo del problema del ejemplo 7. ¿Es la cota superior mejor que las obtenidas con los algoritmos de las aristas clasificadas y con el del vecino más cercano?

Hay otras formas de obtener cotas inferiores para c(H) (el valor mínimo). Si en un ciclo hamiltoniano de coste mínimo eliminamos un vértice, digamos v, y las aristas correspondintes, se obtiene un árbol T porque H es un ciclo hamiltoniano (solo pasa una vez por cada vértice). Entonces, T es un árbol generador para el grafo G' obtenido eliminando el vértice v y todas las aristas que en el concurren. Por el teorema de Kruskal, el algoritmo de Kruskal produce un árbol K con $c(K) \leq c(T)$. Si ahora añadimos a K las dos aristas A_1 y A_2 de menor valor que concurren en el vértice v se tiene

$$c(K) + c(A_1) + c(A_2) \leq c(T) + c(A_1) + c(A_2) \leq c(H)$$

porque se han añadido dos aristas que salen de v que no producen necesariamente las del ciclo hamiltoniano de coste mínimo.

ALGORITMO PARA ENCONTRAR COTAS INFERIORES PARA EL PV

1. En un grafo valorado G eliminar un vértice v y todas sus aristas.
2. En el nuevo grafo G' encontrar un árbol generador de coste mínimo K usando el algoritmo de Kuskal.
3. Añadir a K dos aristas de coste mínimo que salgan del vértice v.
4 Repetir este procedimiento para cada vértice del grafo.

Ejercicio 10. Busca cotas inferiores para el problema del viajante del ejemplo 7. Comienza primero eliminando el vértice D y luego eliminando el vértice A. ¿Es alguna de estas cotas inferiores igual a alguna de las cotas superiores encontradas en el ejemplo 7?

Sea M el ínfimo de todas las cotas superiores encontradas para el ciclo hamiltoniano de coste mínimo en un árbol G. Sea m el supremo de las cotas inferiores encontradas para el mismo problema. Si m=M hemos encontrado un ciclo hamiltoniano de coste mínimo y resuelto el problema del viajante.

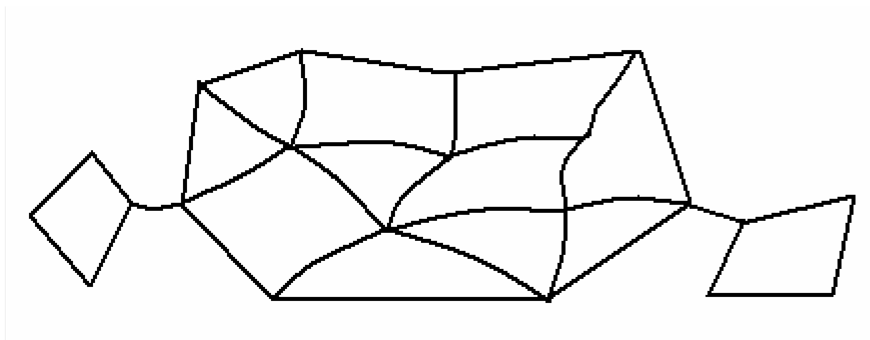
Si m < M una estimación del error cometido usando un ciclo hamiltoniano que produzca M en lugar del de coste mínimo es, en porcentaje,

$$\frac{M-m}{m}\times 100$$

Ejercicio para practicar nº 5. Busca cotas inferiores del ciclo hamiltoniano de coste mínimo para el problema de las siete ciudades que has buscado en el ejercicio para practicar nº 4. ¿Puedes decir si alguno de los caminos encontrado con el algoritmo del vecino más cercano o con el de las aristas clasificadas produce el ciclo de coste mínimo? Si no puedes, elige el mejor e indica una estimación del error que se comete usando este ciclo en lugar del óptimo.

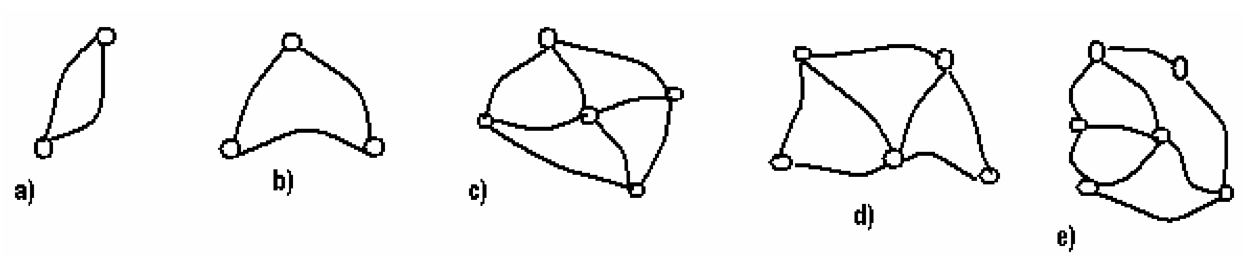
8. EL PROBLEMA DEL CAMPO DE ARROZ Y LA FÓRMULA DE EULER PARA GRAFOS PLANOS

El problema del campo de arroz. Un campo de arroz como en el de la figura está formado por compartimentos estancos. El exterior está anegado por agua. Queremos anegar cada una de las zonas del campo abriendo el menor número posible de compuertas en las paredes. ¿Cuántas compuertas deberían abrirse?



Si eliminamos las aristas en las que tenemos que abrir una compuerta se obtendrá un árbol, porque no puede haber circuitos. El nuevo grafo no tendrá caras.

Ejercicio 11. En los cinco gráficos siguientes elimina el menor número de aristas posible para que el grafo se convierta en un árbol. Después rellena la tabla. A la vista del resultado haz una conjetura sobre el número de caras que habría que suprimir en cualquier grafo plano.



	CARAS	VÉRTICES	ARISTAS	A+1-V	Aristas suprimidas
a)					
b)					
c)					
d)					
e)					

LA FÓRMULA DE EULER PARA GRAFOS PLANOS CONEXOS:

CARAS + VÉRTICES = ARISTAS + 1

NOTA 1: Puesto que en un árbol no hay ciclos, tampoco hay caras. Por lo tanto, para un árbol conexo VÉRTICES = ARISTAS +1.

NOTA 2. Si quitamos una cara de un poliedro sin agujeros y lo deformamos se obtiene un grafo plano. Como hemos quitado una cara, para cualquier poliedro sin agujeros se debe cumplir CARAS + VÉRTICES = ARISTAS + 2.

Ejercicio para practicar nº 6. Usa la fórmula de Euler para demostrar que en un grafo plano conexo G el menor número de aristas que hay que suprimir para convertirlo en un árbol T coincide con el número de caras del grafo. Para hacerlo vete suprimiendo una arista de cada cara que encuentres en el gráfico. ¿Cuál es el menor número de compuertas que hay que abrir en el campo de arroz?

9. GRAFOS REGULARES Y LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS

Un grafo es **regular de orden k** si el número de aristas que concurren en cada vértice es k

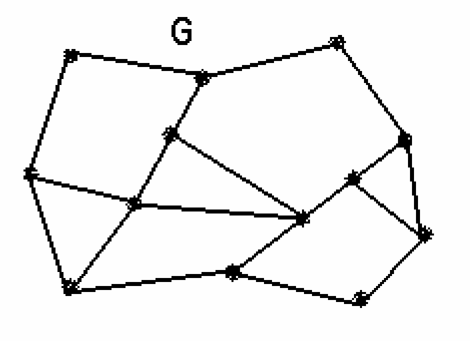
NOTA 1. En un grafo regular de orden k se tiene $2A = kV$ porque k aristas concurren en cada vértice y cada arista tiene 2 vértices.

Ejercicio 12. Dibuja grafos regulares conexos planos de órdenes 2 y 3. ¿Puedes dibujar uno de orden 4?

GRAFO DUAL

Dado un grafo G plano se construye su **grafo dual** G* de la siguiente manera: por cada cara de G, incluyendo la cara que rodea al grafo, seleccionamos un punto. Dos de estos puntos a y b serán conectados por una arista si pertenecen a caras que tienen en común una arista e de G y la nueva arista se traza entre a y b cruzando e, pero no otras aristas de G. Si hay varias aristas en común entre dos caras se trazan nuevas aristas por cada frontera común.

Ejercicio 13. Dibuja el grafo dual del grafo siguiente.



Un grafo es **completamente regular** si tanto G como G* son regulares (no necesariamente del mismo orden)

EL OBJETIVO ES DEMOSTRAR QUE HAY "*POCOS*" TIPOS DE GRAFOS COMPLETAMENTE REGULARES.

TEOREMA 1. Sea G un grafo plano regular de orden k en el que se tiene en cuenta su cara exterior de manera que su dual G* sea un grafo plano regular de orden k*. Si k>2 y k*>2 solamente hay cinco tipos de grafos que corresponden a las versiones planas de los sólidos platónicos: el tetraedro, el cubo, el dodecaedro, el octaedro y el icosaedro.

Demostración. Como G tiene k aristas en cada vértice y cada arista une dos vértices se tiene:

(1) $$2A = kV$$

Como G* es regular de orden k*, cada cara de G está rodeada de k* aristas y cada arista comparte dos caras:

(2) $2A = k^*C$

De (1) y (2) se deduce:

(3) $A = \frac{1}{2}kV$ y (4) $C = \frac{k}{k^*}V$

Por la fórmula de Euler para G, $C+V = A + 2$ (contando la cara exterior) tenemos:

(5) $V(2k + 2k^* - k^*k) = 4k^*$

Como $4k^*$ y V son números positivos debemos tener $2k + 2k^* - k^*k > 0$. Por tanto:

(6) $kk^* - 2k - 2k^* < 0 \Leftrightarrow (k - 2)(k^* - 2) < 4$

Como $k > 2$ y $k^* > 2$ se tiene $k - 2 > 0$ y $k^* - 2 > 0$ y la fórmula (6) nos dice que ambos tienen que ser menores que 4.

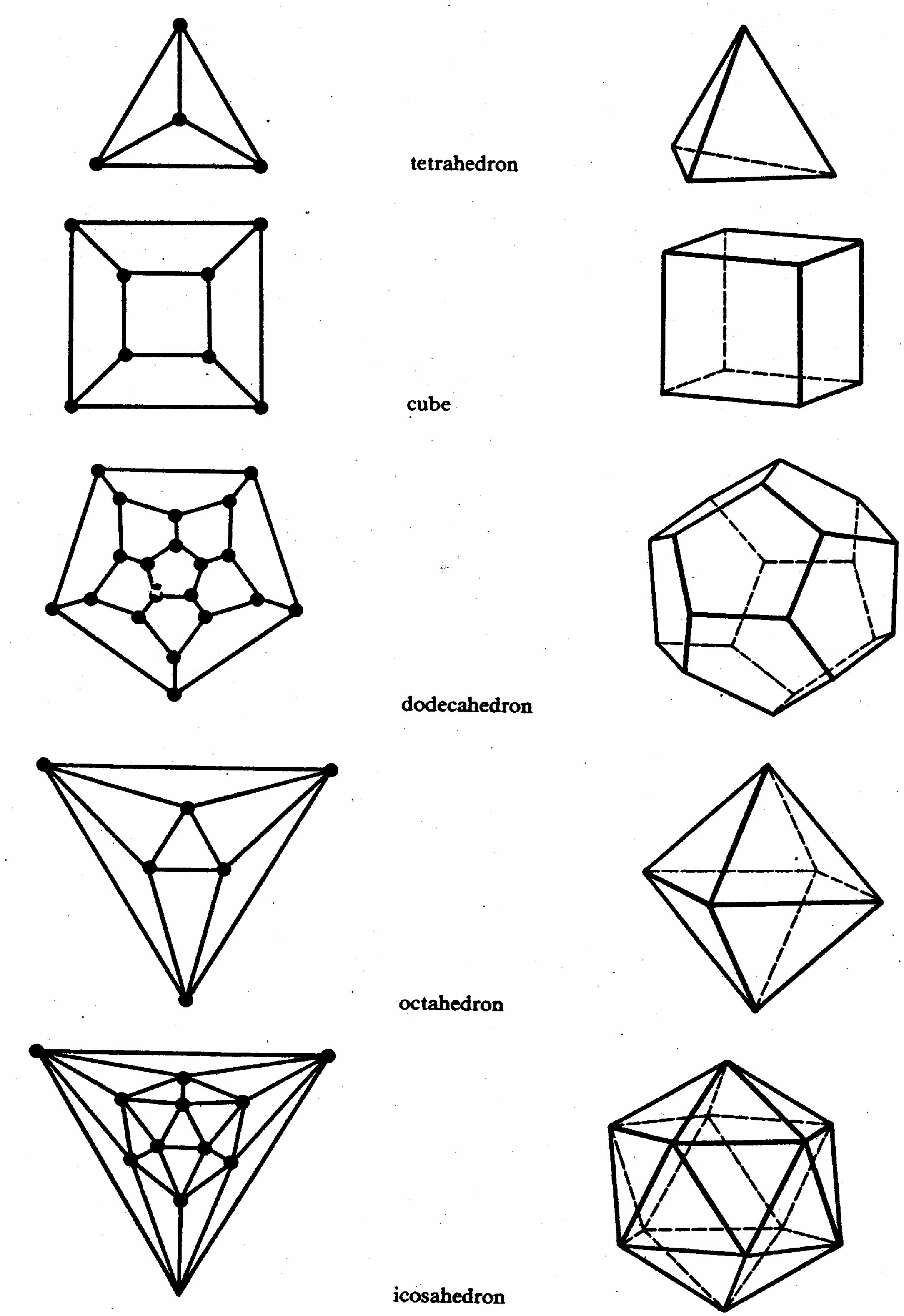
Si k - 2 = 1 se ha te tener k* - 2 = 1, 2 , 3
Si k – 2 = 2 se ha de tener k* - 2 = 1
Si k – 2 = 3 se ha de tener k* - 2 = 1

Con los **cinco** casos posibles que nos han salido rellena la siguiente tabla y mira a la figura de la página siguiente para completar la demostración del teorema.

k	k*	V	C	A	TIPO

El valor de V se saca de (5)
El valor de C se saca de (4)
El valor de A se saca de (3)

Cada una de esta configuraciones planas corresponde a un de los sólidos platónicos.



El dual de un grafo completamente regular es completamente regular intercambiando k y k*. El "cubo" es el dual del "octaedro" y el "icosaedro" es el dual del "dodecaedro". El "tetraedro" es el dual de si mismo.

El estudio de los grafos planos completamente regulares no se ha completado. Faltan algunos casos.

Si $k=2$, k^* puede ser cualquier numero entero positivo. Dibuja grafos planos en este caso para $k^*= 2, 3$ y 4

Si $k^*=2$, k puede ser cualquier número entero positivo. Dibuja grafos planos en este caso para $k= 2, 3$ y 4.

Si $k=1$ demuestra que $k^* =2$. y dibuja el grafo correspondiente.

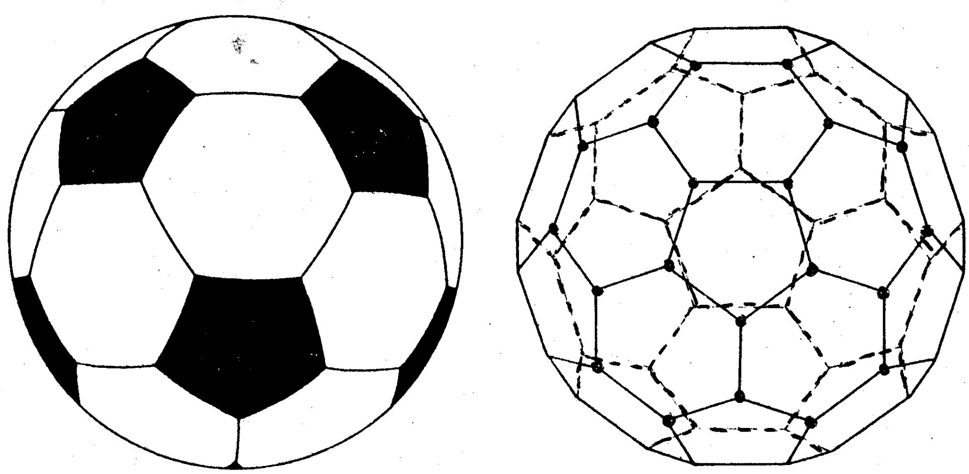
Si $k^* =1$ demuestra que $k=2$ y dibuja el grafo correspondiente.

Ejercicio para practicar nº 7. Un grafo regular de orden 4 está formado solamente por caras triangulares y cuadrangulares (también se debe tener en cuenta la cara exterior)

(a) Demuestra que el número de caras triangulares debe ser 8
(b) Dibuja un grafo regular de orden 4 con 8 caras triangulares y 2 cuadrangulares (puedes dibujarlo con la cara exterior cuadrangular)

Ejercicio para practicar nº 8. Demuestra que el único grafo plano regular con caras pentagonales y hexagonales es de orden 3 y debe tener 12 caras pentagonales

Nota: El poliedro con k=3 y con 12 caras pentagonales más conocido es el "icosaedro truncado" (fullereno, C_{60}, balón de fútbol) que tiene 20 caras hexagonales. (C= 32, A=90, V=60)



(a) (b)