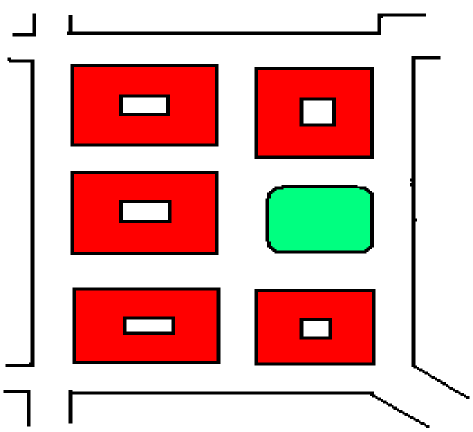
LAS CIENCIAS DE LA PLANIFICACIÓN

1. MODELIZACIÓN CON GRAFOS

El objetivo de las **ciencias de la planificación** es encontrar el mejor método para resolver un problema, y si es posible encontrar la **solución optima**: hacer varios trabajos lo más rápidamente posible, buscar los mayores beneficios, buscar el mínimo coste..... Si no es posible encontrar la solución optima, buscar alguna que se aproxime a la óptima.

Los problemas de las ciencias de la planificación se pueden representar con **grafos**

1. Recorrido de calles. Dibuja un grafo que indique las calles por las que tiene que pasar un cartero para repartir el correo por todos los edificios de las calles del mapa.



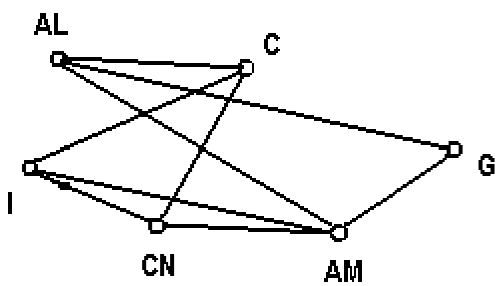
En este problema queremos que el cartero haga el recorrido más eficiente, es decir, no pasar dos veces por la misma arista (si es posible) y regresar al punto de comienzo. ¿Se pueden recorrer las calles con el criterio de eficiencia descrito?

2. Problemas de asignación de tareas. Una empresa ofrece cuatro puestos de trabajo: uno de carpintero, dos de fontanero y uno de tapicero. Recibe cuatro solicitudes: una es de carpintero, otra es de carpintero y fontanero y las dos restantes son de fontanero y tapicero. Describe este problema con un grafo e intenta decidir si se pueden asignar tareas a todos los candidatos.

3. Construcción de redes. Se quiere construir un oleoducto entre Madrid, Barcelona, Valencia y Sevilla. Estudios técnicos han determinado los siguientes costes de construcción en millones de euros indicados en la tabla. Haz un grafo, en este caso poniendo en cada arista (oleoducto) el coste de su construcción, y busca la red menos costosa que abastezca a todas las ciudades.

	Mad	Bar	Sev	Val
Mad		60	40	30
Bar			80	50
Sev				50
Val				

4. Problema de horarios. Se deben impartir varias asignaturas y no se pueden programar a la misma hora dos asignaturas que tienen alumnos matriculados en ambas. En este caso los vértices representan asignaturas y una arista entre dos vértices significa que hay alumnos matriculados en las asignaturas que representan los vértices. Debajo tienes un ejemplo



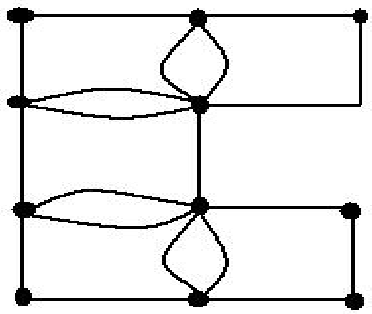
¿Se puede hacer un horario de cuatro horas por la mañana, sin incompatibilidades? Para resolver este problema se necesita un ingrediente más de los grafos: **el coloreado de vértices**. Dos vértices unidos por una arista no se pueden colorear del mismo color ¿Cuál es el menor número de colores que se necesita para colorear los vértices de este grafo?

5. Colorear mapas. Se quiere colorear el mapa de España de manera que dos Comunidades Autónomas con frontera común no tengan el mismo color. Se pasa a un problema de grafos: las capitales cada Comunidad son los vértices del grafo; dos capitales están unidas por una arista si sus Comunidades Autónomas tienen frontera en común. Ahora queremos colorear los vértices del grafo de manera que dos vértices unidos por una arista no tengan el mismo color. ¿Cuántos colores necesitas?

CONCEPTOS

GRAFO: Conjunto finito de puntos y líneas que los unen. Sirven para hacer un modelo de situaciones más complejas.
VÉRTICE: Cada uno de los puntos del grafo.
ARISTA: Cada una de las líneas que unen dos puntos de un grafo.
PASEOS: Es una sucesión finita de vértices del grafo (pueden repetirse vértices) de manera que entre cada dos vértices consecutivos haya una arista del grafo.
CAMINO: Es un paseo en el que no se repite ninguna arista.
CIRCUITO: Es un camino que comienza y termina en el mismo vértice-

2. EL NÚMERO DE ARISTAS EN UN GRAFO



En un grafo, el **grado** de cada vértice es el número de aristas que en él concurren.

Puesto que cada arista une dos vértices (no se permiten lazos), la suma de los grados de todos los vértices es el doble del número de aristas

Algunos grados serán pares y otros impares. Si quitamos todos los pares nos quedan solo impares y su suma debe ser par.

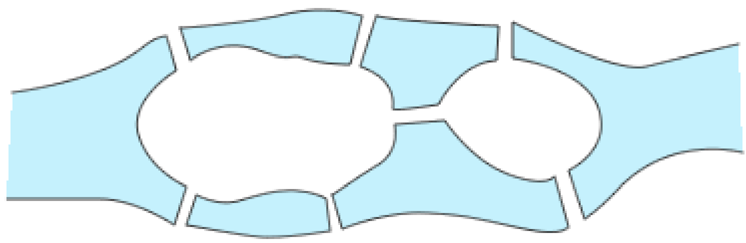
Todo grafo debe tener un número par de vértices de grado impar.

Ejercicio 1. Un grafo se dice regular de grado r si todos sus vértices tienen grado r. ¿Puede haber un grafo regular de grado 5 con 27 vértices?

Ejercicio 2. Un grafo con n vértices es completo, y se denota por K_n, si cada vértice tiene n-1 aristas que le unen con el resto de los vértices del grafo. Dibuja K_3, K_4 y K_5. ¿Cuántas aristas tiene el grafo K_n?

3. CIRCUITOS DE EULER

La teoría de grafos nació en 1736, cuando Leonhart Euler publicó un artículo en la Academia de Ciencias de San Petersburgo sobre el problema de los puentes de Könisberg levantados para cruzar el rio Pregel.



¿Es posible recorrer todos los puentes sin pasar dos veces por el mismo puente?

CIRCUITO DE EULER: Circuito que recorre todas las aristas del grafo. Recuerda que todo circuito es un camino y en los caminos no se repiten ninguna arista.

Un grafo es **conexo** si para cada par de vértices hay por lo menos un camino que une ambos vértices.

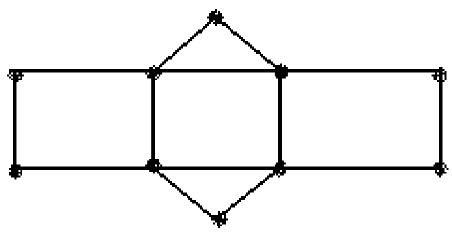
Para que un grafo tenga un circuito de Euler, el grafo debe ser conexo. Como todo camino debe entrar y salir del vértice (el vértice de comienzo debe ser el de llegada) si un grafo tiene un circuito de Euler el grado de cada vértice debe ser un número par. Euler se dió cuenta en 1736 que el recíproco de la afirmación anterior también es cierto.

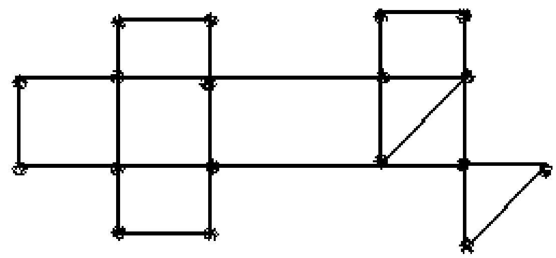
TEOREMA (Euler, 1736). Sea G un grafo conexo. El grafo G tiene un circuito de Euler si y solo si todos sus vértices tienen grado par.

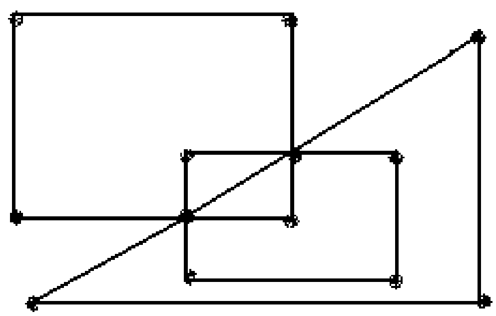
No siempre es necesario regresar al punto de partida. En un grafo podemos preguntarnos si hay un camino de Euler (que use todas las aristas una sola vez) que comience en un vértice a y termine en otro b. Si hay un camino de Euler C_{ab} el grafo debe ser conexo y todos los grados de los vértices son pares, excepto los de a y b que deben ser impares. El recíproco es cierto y se deduce del teorema de Euler.

TEOREMA (Caminos de Euler). Un grafo conexo G tiene un camino de Euler C_{ab} si y solo si a y b son los únicos vértices de G de grado impar.

Ejercicio para practicar nº 1. Pon letras a los vértices e indica un circuito de Euler en cada uno de los siguientes grafos.

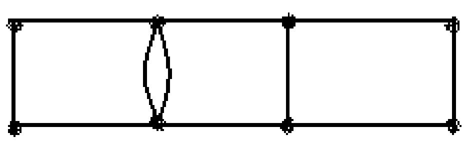




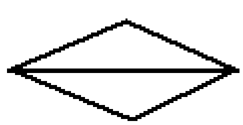


3.1. CIRCUITOS CON ARISTAS REUTILIZADAS

El problema del cartero es el problema de repartir el correo por todas las calles que tengan edificios. Habrá que pasar por cada acera por separado. El grafo siguiente que representa las calles por las que debe pasar un cartero para repartir el correo no tiene un circuito de Euler y por tanto el cartero no lo puede recorrer sin pasar por una o más aristas dos veces. El objetivo es minimizar el número de aristas que se usan más de una vez.

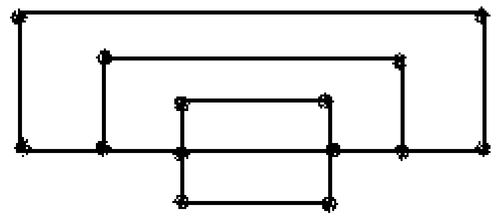


Eulerizar un grafo: Añadir aristas a un grafo hasta obtener uno en el que haya un circuito de Euler. Intentar hacerlo añadiendo el menor número de aristas posible.



Reglas: 1. Hacer que los grados de los vértices del nuevo grafo sean todos pares.
2. Nunca unir dos puntos que no estén unidos en el grafo por una arista.

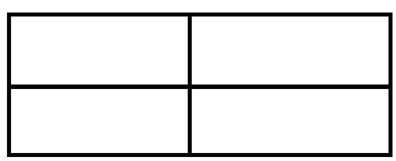
Ejercicio 3. Euleriza el siguiente grafo:



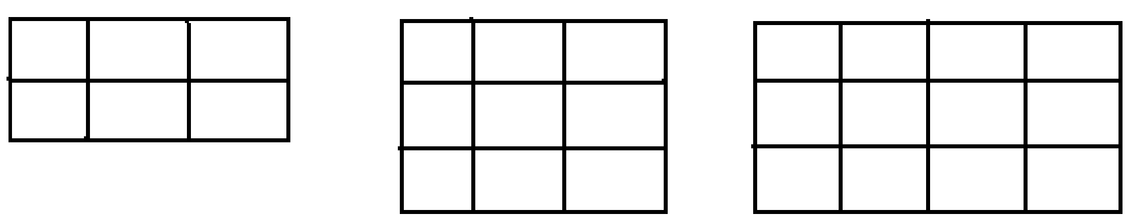
Una buena parte de las ciudades modernas son entramados rectangulares de calles. Sobre ellas se puede seguir una estrategia para eulerizar grafos.

Estrategia: Comenzar en cualquier vértice. Si tiene grado impar añadir una arista y viajar por ella hasta el siguiente vértice. Si tiene grado par elegir una arista para ir al siguiente vértice. Toma esta decisión en cada vértice.

Ejercicio 4. Utiliza la estrategia descrita anteriormente para eulerizar el siguiente grafo de tipo rectangular.



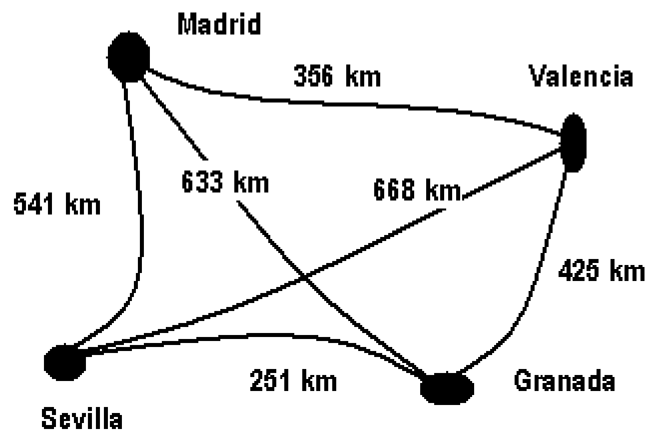
Ejercicio para practicar nº 2. Euleriza los siguientes grafos con la estrategia descrita antes del ejercicio 4.



Ejercicio para practicar nº 3. Busca un mapa (de tu pueblo, de tu barrio,...). Selecciona aproximadamente una docena de calles y haz un grafo que las represente (el grafo debe ser conexo). Estudia el problema del reparto del correo de la manera más eficiente ¿Hay un circuito de Euler? ¿Hay muchos? Si no hay un circuito de Euler, ¿se puede eulerizar el grafo? Busca eulerizaciones con pocas aristas reutilizadas.

4. DE VISITA POR CIUDADES. CICLOS HAMILTONIANOS

Ejemplo 1. Partiendo de Madrid, queremos visitar Valencia, Sevilla y Granada, regresando de nuevo a Madrid. El viaje lo queremos hacer de manera que se minimice la distancia recorrida. Las cuatro ciudades son los vértices de un grafo y quedan unidas por carreteras, que son las aristas del grafo. A cada arista le añadimos un número (un peso, un valor) que indica la distancia entre las dos ciudades que une. Haciendo todos los posibles recorridos, busca el que minimice la distancia que hay que viajar.



Ejercicio 5. Si quieres viajar por n ciudades (visitando cada una de ellas una sola vez), ¿cuántos circuitos tendrías que comprobar? ¿Cuánto tardaría un ordenador que comprobara 10^9 recorridos por segundo en completar el estudio de todos los caminos en un grafo con 25 ciudades?

CONCEPTOS

En un grafo, un camino es **hamiltoniano** cuando pasa una sola vez por cada uno de los vértices del grafo. Si el camino es cerrado se dice un ciclo **hamiltoniano.**

En un grafo valorado un **ciclo hamiltoniano de menor coste** es aquél en el que la suma de los valores de las aristas que recorre es la menor posible.

Ejercicio 6. Dibuja un grafo que tenga más de un ciclo hamiltoniano. Dibuja un grafo que no tenga ciclos hamiltonianos.

El nombre de hamiltoniano se debe a William Rowan **Hamilton** (1805-1865). Ideó un puzle que consistía en un dodecaedro con puntas clavadas en sus vértices y cada vértice rotulado con el nombre de una ciudad. Una cuerda iba unida a una de las ciudades. El objetivo era recorrer todos los clavos con la cuerda pasando una sola vez por cada uno de ellos. Para hacer el puzle más interesante, Hamilton indicaba las primeras ciudades del recorrido.

Busca un ciclo hamiltoniano en la siguiente versión plana del puzle de Hamilton: