Hoja 6

1.- Hallar el vector tangente a la curva $\sigma(t) = (t^2, t^3)$ en el punto $(1, -1)$. Escribir la ecuación de la recta tangente correspondiente. ¿Existe el vector tangente en el punto $(0, 0)$?

2.- Una partícula se mueve en el espacio $\mathbb{R}^3$ por la trayectoria $\sigma(t) = (t \cos t, t \operatorname{sen} t, t^2)$, donde $t \in [0, 2\pi]$. Determinar su vector velocidad en el punto $(0, \pi/2, \pi^2/4)$ y la recta tangente en dicho punto.

3.- Para las siguientes curvas hallar la velocidad, la rapidez (es decir, el módulo del vector velocidad), la aceleración y la ecuación de la recta tangente en el valor de t dado:

(a) $\sigma_1(t) = \big(e^{-t} \operatorname{sen} t, e^{-t} \cos t\big), \quad t = 2\pi.$ $\qquad$ (b) $\sigma_2(t) = \big(2t \operatorname{sen}(2t), 3t \cos(2t), 5t\big), \quad t = \dfrac{\pi}{2}.$

4.- Una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = \big(t \cos t, t \operatorname{sen} t, \sqrt{2}\, t^2\big)$ con $t \geq 0$. Cuando $t = 2\pi$, la partícula se sale por la tangente a $\sigma(t)$ y sigue desplazándose en línea recta con velocidad constante. Escribir la trayectoria que define la posición de la partícula para $0 \leq t \leq 4\pi$. ¿Cuál será su posición y su velocidad en $t = 4\pi$? ¿Cuánta distancia habrá recorrido desde el instante inicial hasta ese momento?

5.- Hallar la longitud de la curva en el intervalo indicado:

(a) $\sigma(t) = (t, 4t, t^2)$, $0 \leq t \leq 4$.

(b) $\sigma(t) = \big(2t \operatorname{sen}(2t), 2t \cos(2t), \sqrt{8}\, t\big)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) $\sigma(t) = \big(e^{-t} \cos t, e^{-t} \operatorname{sen} t\big)$, $0 \leq t < \infty$.

6.- Calcular la longitud de la curva:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \big(\cos t, \operatorname{sen} t, 3t\big) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \pi, \\ \big(-1, -t + \pi, 3t\big) & \text{si} \quad \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

7.- El los siguientes casos, dibujar el camino σ y hallar la integral $\displaystyle\int_\sigma f\, ds$.

(a) $f(x, y, z) = x + y + z$ y $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

(b) $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{y + z}$ y $\sigma(t) = \Big(t, \dfrac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}, t\Big)$, $1 \leq t \leq 2$.

(c) $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{y = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $f(x, y, z) = \dfrac{1}{y^3}$ y $\sigma(t) = (\log t, t, 2)$, $1 \leq t \leq e$.

8.- Dibujar las siguientes curvas, y hallar su longitud de arco.

(a) El arco de cicloide descrito por

$$\begin{cases} x = R\,(t - \sin t), \\ y = R\,(1 - \cos t), \end{cases}$$

con $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) La cardioide que en coordenadas polares viene dada por $r = 1 + \cos\theta$, con $0 \leq \theta \leq \pi$.

9.- Esbozar los siguientes campos de vectores

(a) $F(x, y) = (-x, y)$. $\qquad$ (b) $F(x, y) = (-y, x)$.

(c) $F(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$. $\qquad$ (d) $F(x, y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.

10.- Mostrar que $\sigma(t) = (t^2 + 1, 2t, 3)$ es una línea de flujo del campo $F(x, y, z) = (y - 2z + 6, 3z - 7, z)$.

11.- Mostrar que $\sigma(t) = \big(3\,\cos t, 3\,\operatorname{sen} t, 9\,\cos t\,\operatorname{sen} t\big)$ es una línea de flujo del campo $F(x,y,z) = (-y, x, x^2 - y^2)$.

12.- Hallar la divergencia y el rotacional de los campos de vectores:

$$F_1(x,y,z) = (e^{x\,y}, e^{y\,z}, e^z), \qquad F_2(x,y,z) = (x\,y^2\,z^2, x^2\,y\,z^2, x^2\,y^2\,z), \qquad F_3(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}.$$

13.- Dados $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$, y los campos de vectores en $\mathbb{R}^3$, $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, ambos C^1, mostrar las siguientes identidades:

(a) $\operatorname{rot}(f\,\vec{F}) = f\operatorname{rot}\vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$.

(b) $\operatorname{div}(f\,\vec{F}) = f\operatorname{div}\vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}$.

(c) $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot}\vec{G}$.

14.- Mostrar que $F(x,y,z) = (x^2 + y^2, -2\,x\,y, 0)$ no es un campo gradiente.

15.- Dado $F(x,y,z) = (3\,x^2\,y, x^3 + y^3, 0)$, mostrar que $\nabla \times F = \vec{0}$. Hallar una función f tal que $F = \nabla f$.

16.- Dado $F(x,y,z) = (2\,x + 2\,y, 2\,x + 2\,y\,z^2, 2\,y^2\,z)$, mostrar que $\nabla \times F = \vec{0}$. Hallar una función f tal que $F = \nabla f$.

17.- Calcular la integral del campo $\vec{F}(x,y) = (x^2 - y, x + xy + y^2)$ a lo largo de la circunferencia unidad con la orientación positiva, primero empleando la definición de integral de línea y después empleando el teorema de Green.

18.- Calcular el trabajo realizado por el campo

$$\vec{F} = (5\,x^{3/2}\,e^{y^2}, 4\,y\,x^{5/2}\,e^{y^2} + 5\,y^2)$$

a lo largo de la curva descrita en coordenadas polares por la ecuación $r = 2\,\theta^3$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$.

19.- Dados los puntos $A = (2,0), B = (1,-1), C = (1,0)$ y $D = (0,-1)$ de $\mathbb{R}^2$, considérese el camino Γ formado por el arco AB de la circunferencia de centro C y los segmentos orientados BD, DO, OA (O es el origen de coordenadas). Calcular la integral

$$\int_\Gamma (x^4 - x^3 e^x - y)\,dx + (x - y\arctan y)\,dy\,.$$

20.- Hallar la integral de

$$\vec{F} = \big(\frac{-\,y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\big).$$

a lo largo de la circunferencia centrada de radio r con la orientación positiva. Hallar también

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

y explicar por qué esto no contradice el Teorema de Green.