

Hoja 4

- 1.- Sea $f(x, y)$ definida para $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ mediante $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Demostrar que $f(x, y)$ no es integrable en el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

- 2.- Sea $f(x, y)$ definida en $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ mediante $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$

Demostrar la existencia de la integral de f sobre Q y que su valor es 0.

- 3.- Hallar el valor de las siguientes integrales sobre los rectángulos indicados. Explicar, en cada caso, la existencia de la integral.

$$(a) \int_Q x^2 e^y dx dy, \quad Q = [-1, 1] \times [0, \log 2]. \quad (b) \int_Q y^{-3} e^{tx/y} dx dy, \quad Q = [0, t] \times [1, t], t > 0.$$

- 4.- Para cada una de las siguientes funciones $f(x, y)$ definidas sobre el rectángulo $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, se pide representar el conjunto de los valores de $f(x, y)$ sobre Q y calcular el volumen del sólido así definido. Determinar también el conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in Q : f \text{ no es continua en } (x, y)\}$$

y explicar la existencia de las integrales utilizadas.

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} 1 - (x + y) & \text{si } x + y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (b) f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (d) f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } 0 \leq y \leq \sin(\pi x), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- 5.- Dibujar la región de integración, estudiar la existencia de la integral y calcular su valor en cada uno de los casos siguientes.

(a) $\int_{\Omega} x \cos(x - y) dx dy$, siendo Ω el triángulo de vértices $(0, 0), (\pi, 0), (\pi, \pi)$.

(b) $\int_{\Omega} e^{x+y} dx dy$, siendo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

(c) $\int_{\Omega} x^2 y^2 dx dy$, siendo Ω la región acotada del primer cuadrante situada entre las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $y = x$, $y = 4x$.

- 6.- Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$. Dibujar esta pirámide y calcular su volumen.

- 7.- Un sólido está limitado por la superficie $z = x^2 - y^2$, el plano $z = 0$ y los planos $x = 1$ y $x = 3$. Dibujar este sólido y calcular su volumen.

- 8.- En los siguientes apartados, se supone que f es una función integrable en cada una de las regiones Ω . En cada caso, se pide determinar la región Ω e invertir el orden de integración:

$$(a) \int_0^2 \left(\int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right) dy. \quad (b) \int_1^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy \right) dx.$$

$$(c) \int_1^e \left(\int_0^{\log x} f(x, y) dy \right) dx. \quad (d) \int_0^{\pi} \left(\int_{-\sin x/2}^{\sin x} f(x, y) dy \right) dx.$$

9.- Hallar el valor de la integral

$$\int_{\Omega} e^{(y-x)/(y+x)} dx dy,$$

donde Ω es el triángulo determinado por la recta $x + y = 2$ y los dos ejes coordenados. Utilícese un cambio lineal de variables.

10.- En cada uno de los siguientes casos, dibujar la región Ω y expresar la integral $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$ como una integral iterada en coordenadas polares.

(a) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}, a > 0.$

(b) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}.$

(c) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}.$

(d) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}.$

11.- Consideramos la aplicación definida por $\begin{cases} x = u + v, \\ y = v - u^2. \end{cases}$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u, v)$.

(b) Calcular la imagen Ω mediante esta transformación del triángulo T de vértices $(0, 0), (2, 0), (0, 2)$.

(c) Calcular $\int_{\Omega} \frac{1}{(x - y + 1)^2} dx dy.$

12.- Se considera la aplicación definida por $\begin{cases} x = u^2 - v^2, \\ y = 2uv. \end{cases}$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u, v)$.

(b) Calcular la imagen Ω mediante esta transformación del rectángulo R de vértices $(1, 1), (2, 1), (2, 3), (1, 3)$.

(c) Calcular el área de Ω