Universidad Autónoma de Madrid

Análisis Matemático II — **1º de Físicas**

11 DE SEPTIEMBRE DE 2009 — EXAMEN FINAL

APELLIDOS Y NOMBRE ____________________

D. N. I. ____________________ GRUPO ____________________

FIRMA ____________________

1. Sea $f(x,y) = \log(1 - x^2 - y^2)$.

   (a) Determinar $Dom(f)$. ¿Es abierto o cerrado? Razonar la respuesta.

   (b) Sea
   $$G(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right).$$
   Probar que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $G(x,y) \in Dom(f)$ y calcular $\operatorname{grad}(f \circ G)(0,0)$.

2. Sea $f(x,y) = x^2y + y^3 - 2xy$.

   (a) Encontrar todos los puntos críticos de f.

   (b) Determinar la naturaleza de todos los puntos críticos de f.

3. (a) Calcular
   $$I = \int\int_T e^{-x^2}\, dxdy\,,$$
   donde T es el triángulo en $\mathbb{R}^2$ delimitado por los vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$.

   (b) Sea S la frontera del sólido
   $$W = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1\,,\ 1 + y^2 \le z \le 3 + x + y^2\}\,.$$
   Hallar el flujo $F = \int\int_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$ del campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x + y^2z^3, y + z^2x^3, z + x^2y^3)$ a través de la superficie S orientada con el vector normal dirigido hacia el exterior de S.

4. a) Sea A el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^3$ situados por encima del plano $z = 1$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Hallar el volumen de A.

   b) Sea W el sólido que forman todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ que están por encima del plano $z = 0$, dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y fuera de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Hallar
   $$I = \int\int\int_W \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz\,.$$

TIEMPO: 3 HORAS