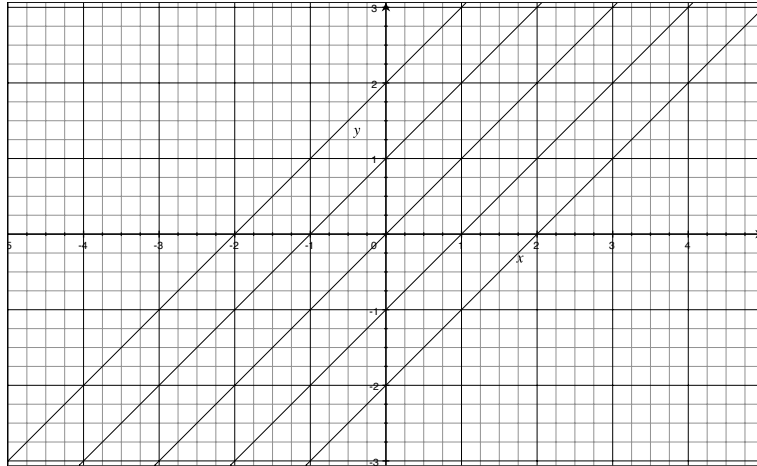


CÁLCULO II, Hoja 2.

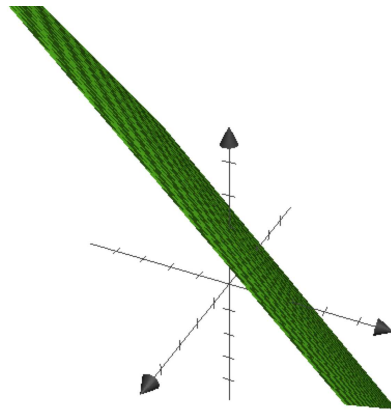
1. Dibujar las curvas de nivel y la gráfica de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$a) f(x, y) = x + y - 2$$

Curvas de nivel-

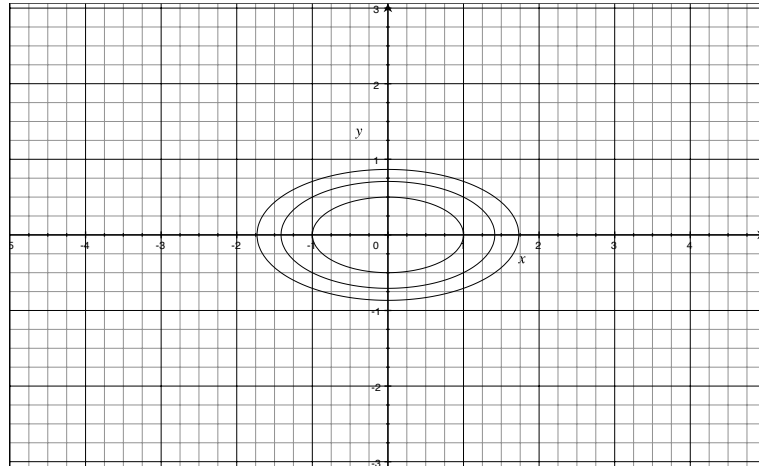


Gráfica-

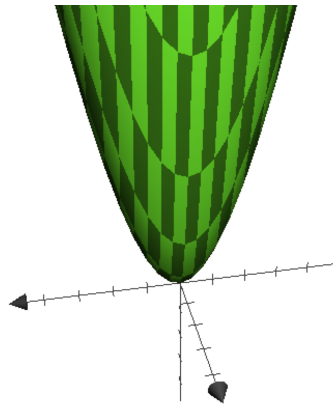


$$b) f(x, y) = x^2 + 4y^2$$

Curvas de nivel-



Gráfica-



$$c) f(x, y) = -x^2y^2$$

Curvas de nivel-

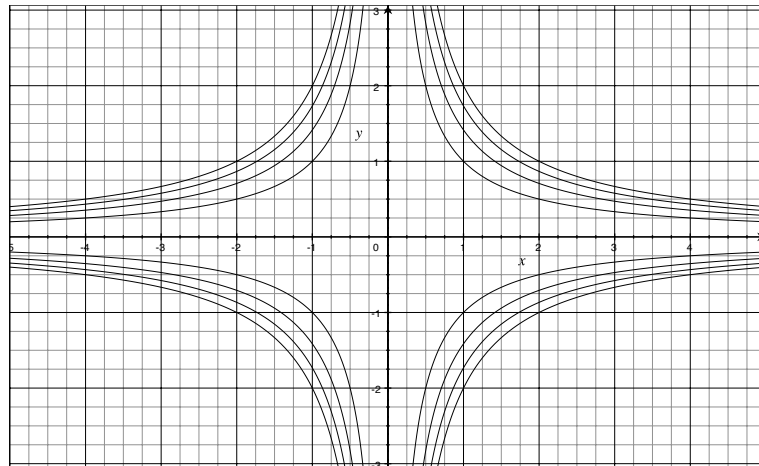
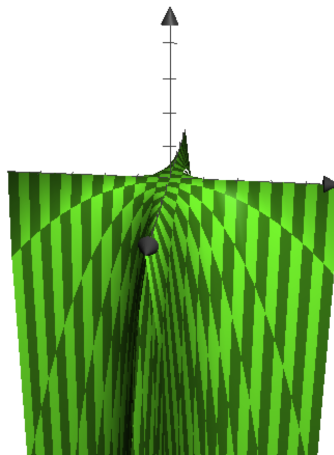


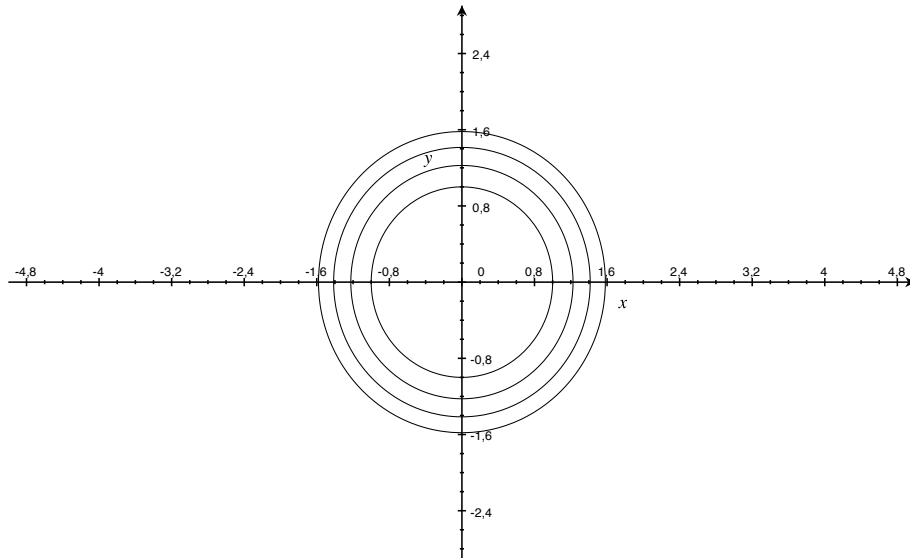
Figura 1:

Gráfica-

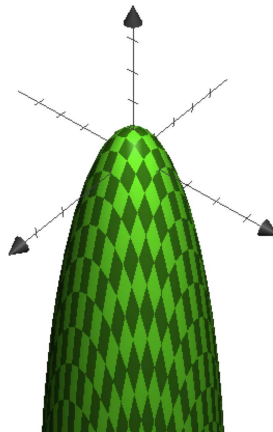


$$d) f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$$

Curvas de nivel-

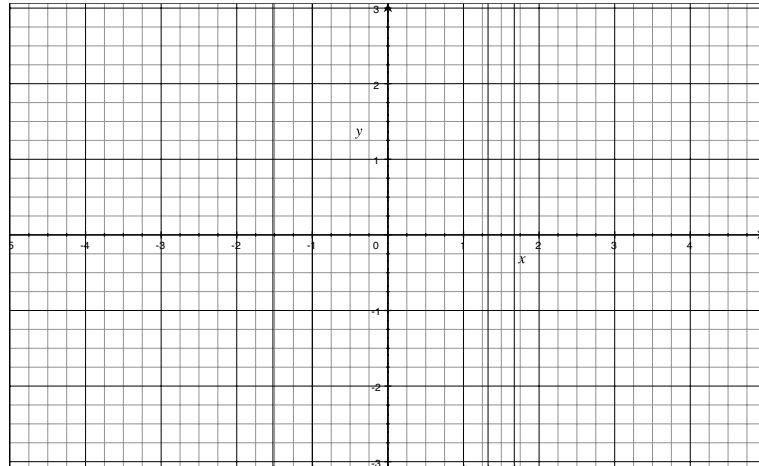


Gráfica-

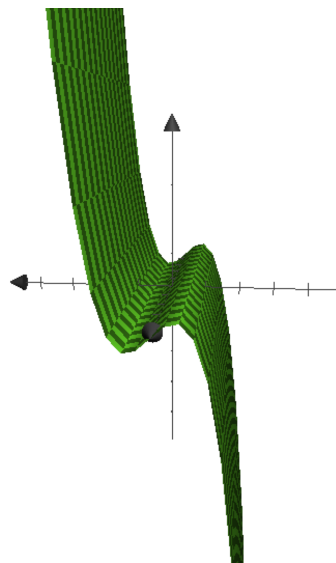


$$f) f(x, y) = x^3 - x$$

Curvas de nivel-

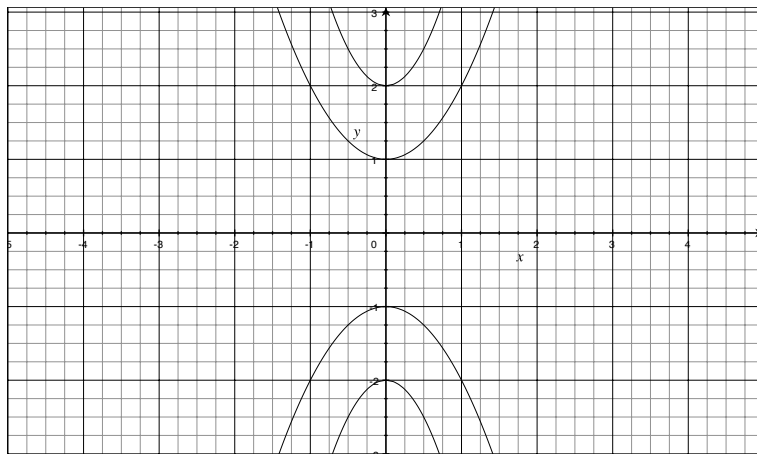


Gráfica-

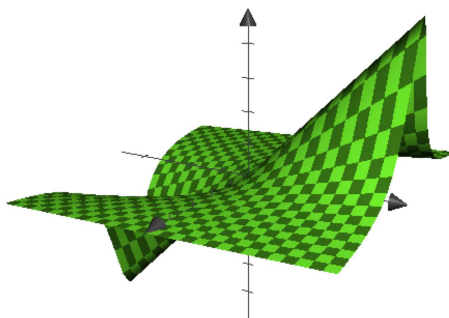


$$g) \frac{y}{1+x^2}$$

Curvas de nivel-

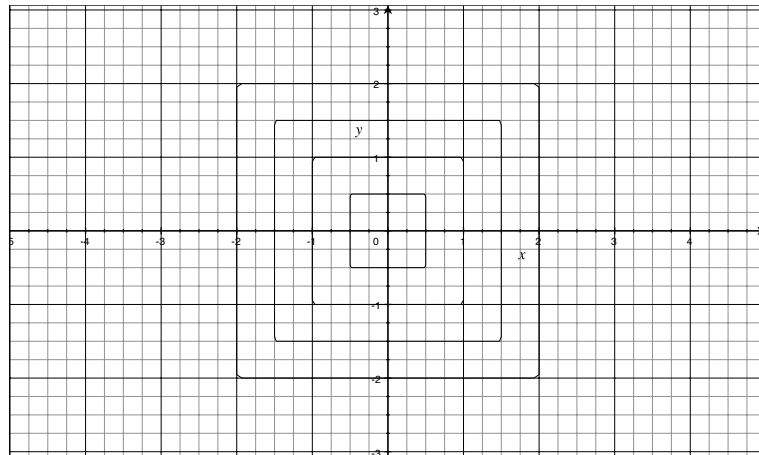


Gráfica-

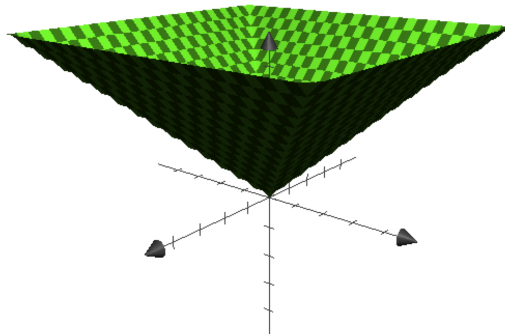


$$h) f(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$$

Curvas de nivel-

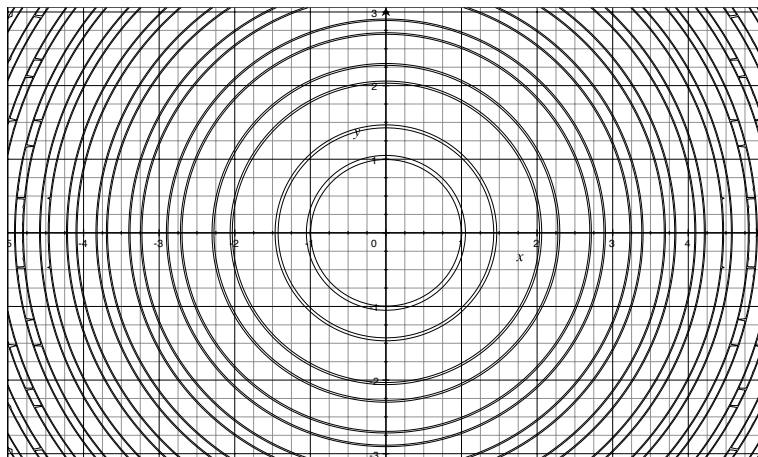


Gráfica-

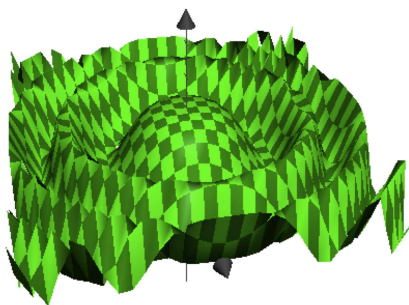


$$i) f(x, y) = \cos^2(x^2 + y^2)$$

Curvas de nivel-



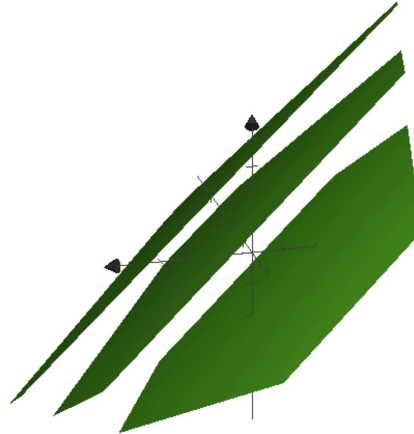
Gráfica-



1. Dibujar las superficies de nivel de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

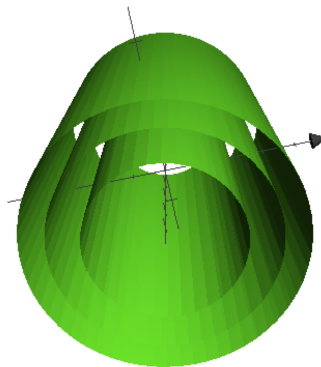
$$a) f(x, y, z) = x - y - z + 2$$

Superficies de nivel-



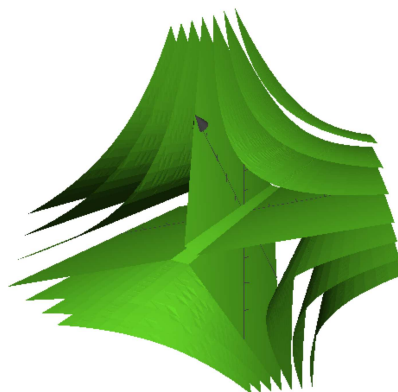
$$b) f(x, y, z) = x^2 + y^2$$

Superficies de nivel-



$$c) f(x, y, z) = y(x + z)$$

Superficies de nivel-



$$d) f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

Superficies de nivel-

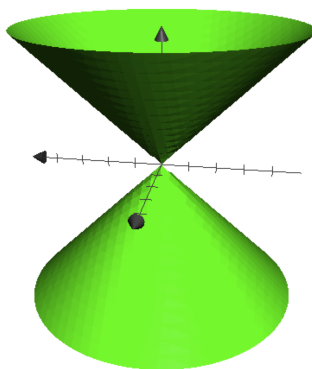


Figura 2: Superficie de nivel cero

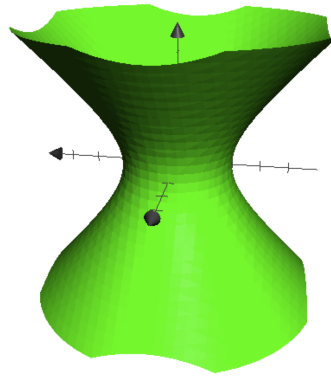


Figura 3: Superficie de nivel positivo

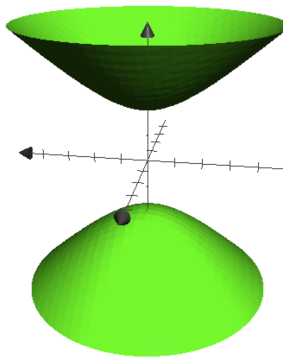


Figura 4: Superficie de nivel negativo

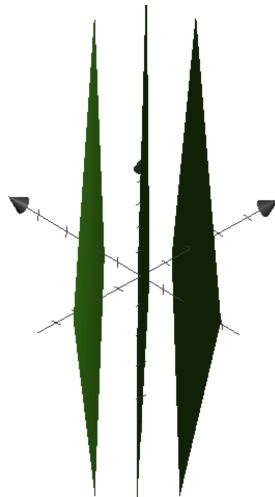
$$e) f(x, y, z) = \cos(x^2 + y^2 - z)$$

Superficies de nivel-



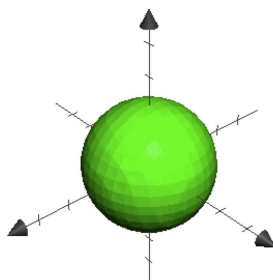
$$f) f(x, y, z) = x - y$$

Superficies de nivel-



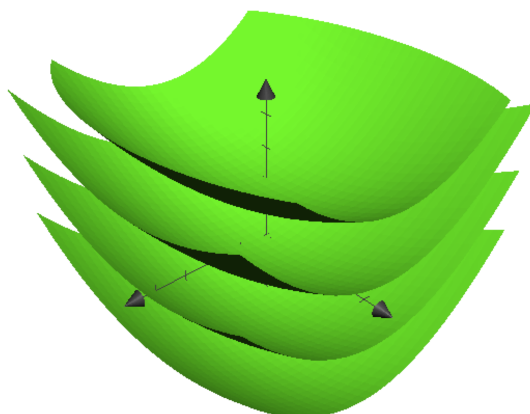
$$g) f(x, y, z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2)$$

Superficies de nivel-



$$h) f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z$$

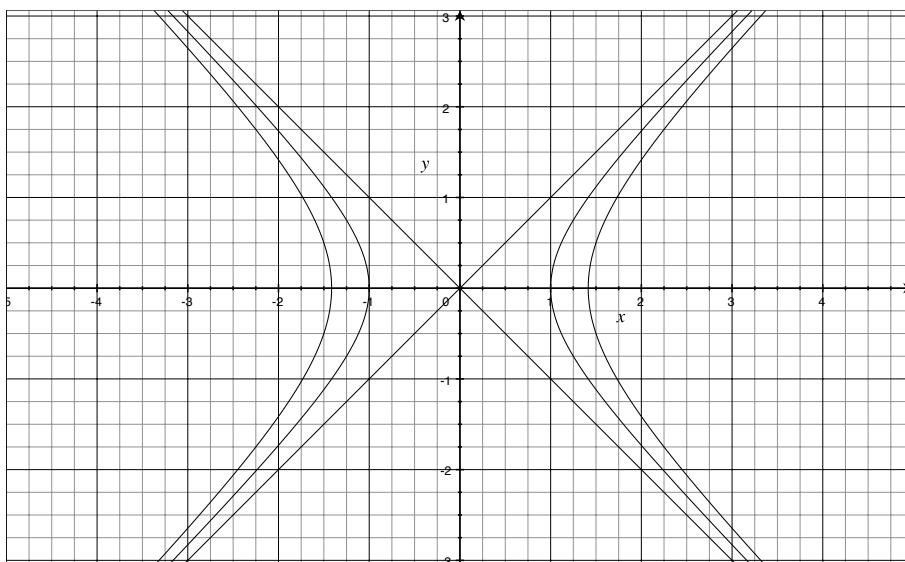
Superficies de nivel-



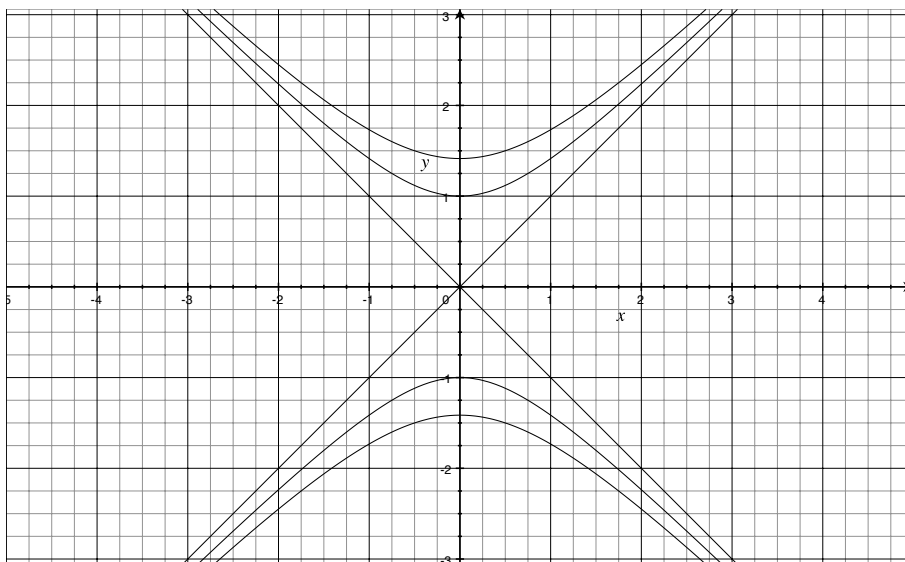
SILLAS DE MONTAR

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

Conjuntos de nivel positivos:



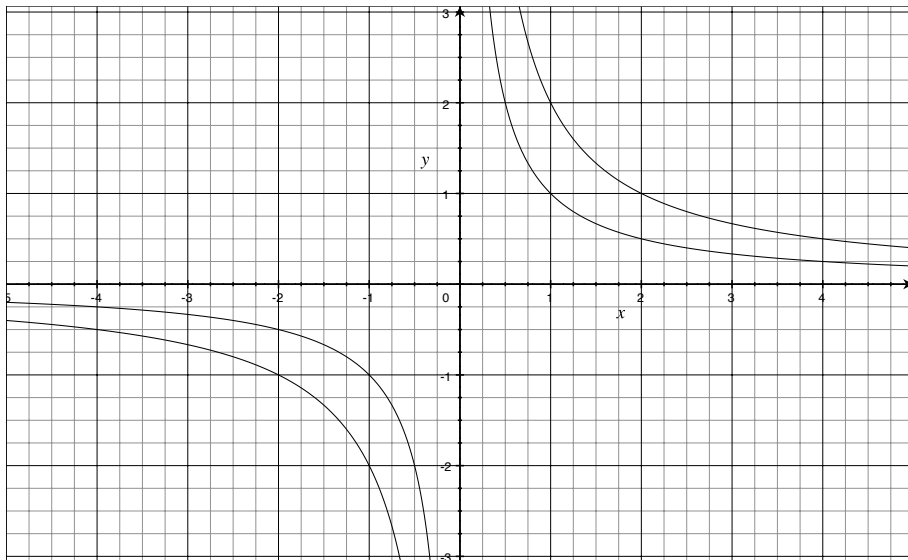
Conjuntos de nivel negativos:



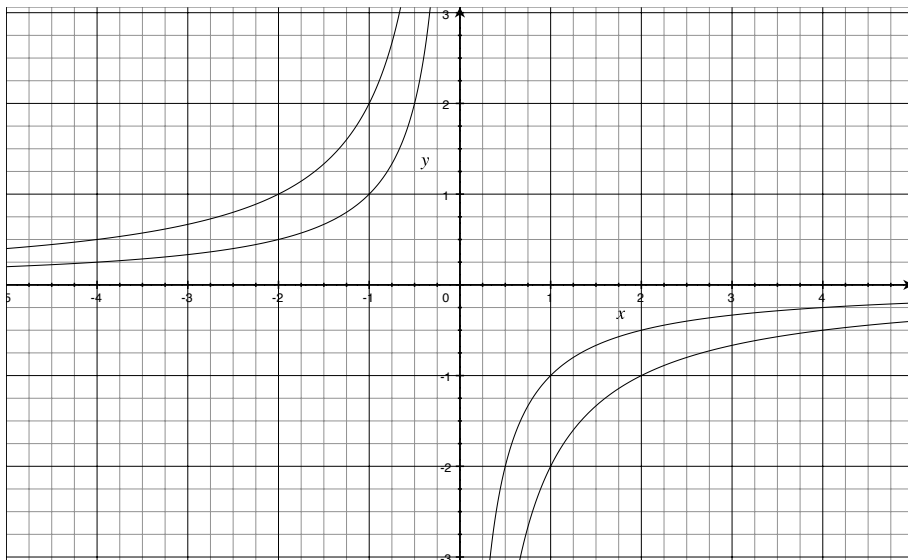
SILLAS DE MONTAR

$$f(x, y) = xy$$

Conjuntos de nivel positivos:



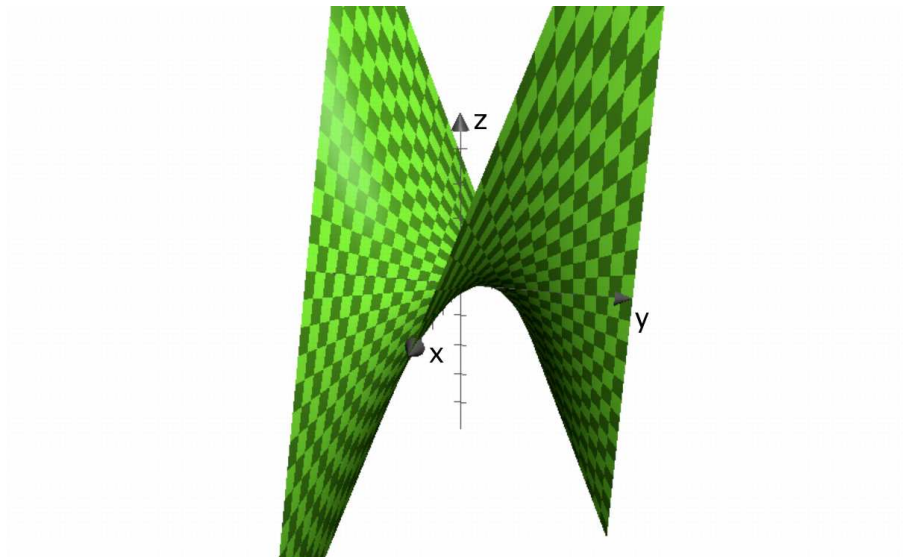
Conjuntos de nivel negativos:



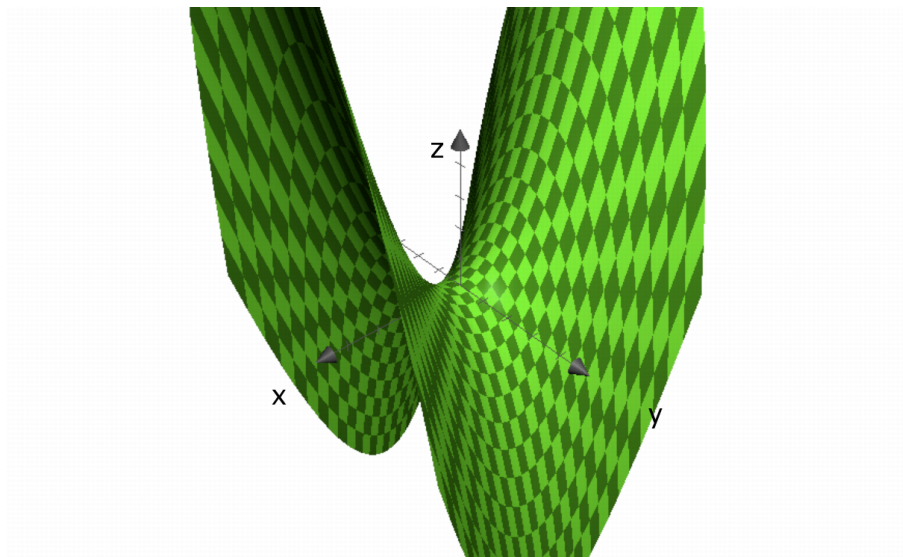
SILLAS DE MONTAR

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

Gráfica:



$$f(x, y) = xy$$

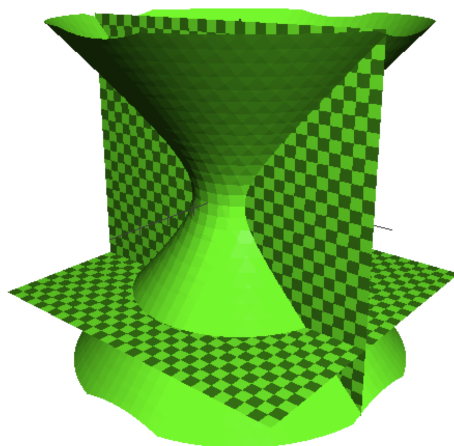


HIPERBOLOIDES

Un hiperboloide es una superficie de revolución generada por la rotación de una hipérbola alrededor de uno de sus ejes de simetría.

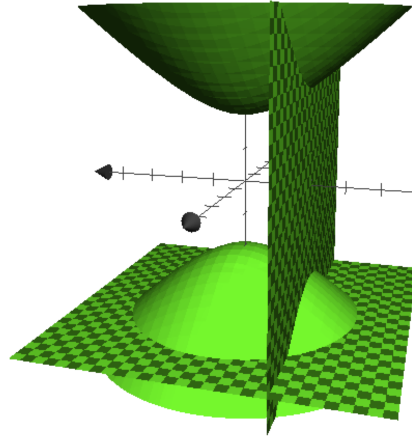
Hiperboloide de una hoja:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Hiperboloide de dos hojas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



NOTA: Obsérvese que las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ son conjugadas.

Tienen mismas asíntotas $y = \pm \frac{b}{a}x$ y distancia focal $c^2 = a^2 + b^2$.

Si una hipérbola tiene iguales sus dos semiejes, $a = b$, entonces se llama hipérbola equilátera y su ecuación se reduce a

$$x^2 - y^2 = a^2 \text{ y } y^2 - x^2 = a^2,$$

con asíntotas $y = \pm x$, perpendiculares entre sí (bisectriz del primer y segundo cuadrante). Haciendo un giro de -45 grados (45 respectivamente), obtenemos la ecuación de la hipérbola referida a sus asíntotas:

$$x^2 - y^2 = a^2 \rightarrow \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{-x' + y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2.$$

Simplificando, $x'y' = \frac{a^2}{2}$ (para un giro de 45 grados obtendríamos $x'y' = -\frac{a^2}{2}$).