Encontrar los valores máximo y mínimo (absolutos) de

$$f(x,y) = x^3 + 3xy$$

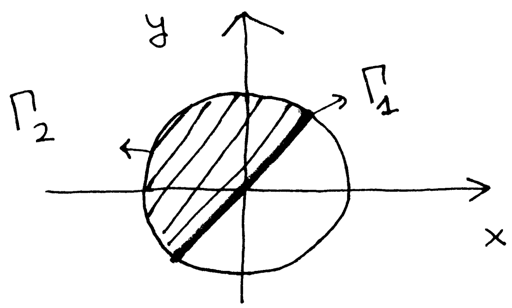
en la región $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 1 \,,\, x \leq y\}$.

<u>Resolución</u>:

i) $$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow x^3 + 3xy$$

es una función continua

ii) Ω es un conjunto compacto



A) Está acotado.

$$\forall (x,y) \in \Omega \,,\quad \|(x,y)\| \leq 1$$

B) Es cerrado.

$$Fr(\Omega) = \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y \,,\, x^2+y^2 \leq 1\} \,\cup$$

$$\cup\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 = 1 \,,\, x \leq y\} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

$$\boxed{\Omega = \overline{\Omega}}$$

iii) Por verificarse i) y ii) concluimos que f alcanza en Ω su valor máximo y mínimo

iv) <u>Estudio de la función en el interior de Ω</u>

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2+3y = 3(x^2+y) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x=y=0$$

$P_1(0,0)$ es un punto crítico. $f(0,0)=0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) = 0$$

f es una función C^∞ en particular es $C^2 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$DH(0,0) = -9 < 0$

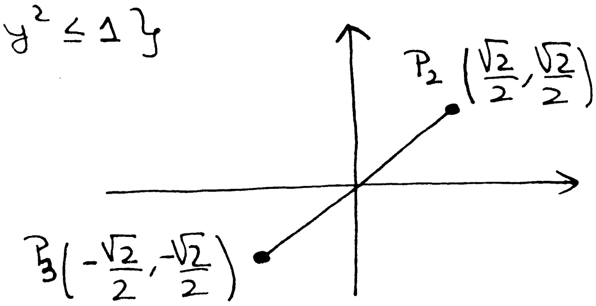
En $(0,0)$ hay un punto de silla

($P_C\, H(0,0) = \begin{vmatrix} -x & 3 \\ 3 & -x \end{vmatrix} = x^2-9=0 \Rightarrow x = \pm 3$

Un valor propio positivo y otro negativo)

v) Estudio de la función en la frontera de Ω:

$$\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x = y \;,\; x^2+y^2 \leq 1\}$$



En Γ_1, $f(x,y) = g(x)$, donde

$$g : \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow x^3+3x^2 = x^2(x+3)$$

g es una función continua en un compacto.

Puntos a considerar: P_2 y P_3 (Puntos extremos del intervalo)

$$g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{6-\sqrt{2}}{4} = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$$

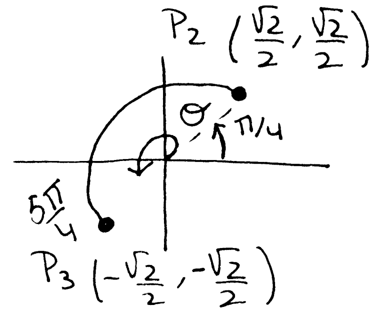
$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{6+\sqrt{2}}{4} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$$

Puntos en el interior del intervalo

$$g'(x) = 3x(x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \notin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

Obtenemos de nuevo $P_1(0,0)$ con $f(0,0) = 0$

$\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 = 1 \;;\; x \leq y\}$



En Γ_2, $f(x,y) = g(\theta)$ donde

$$\sigma : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\theta \longrightarrow (\underbrace{\cos\theta}_{x}, \underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{y})$$

$$g(\theta) = f(\sigma(\theta)) = f(x,y)$$

$g(\theta) = \cos^3\theta + 3\cos\theta \operatorname{sen}\theta$

g es una función contínua en un compacto

<u>Puntos a considerar : Puntos extremos del intervalo</u>

$\theta = \frac{5\pi}{4} \longrightarrow$ de nuevo obtenemos $P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\theta = \frac{\pi}{4} \longrightarrow$ de nuevo obtenemos $P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

<u>Interior del intervalo:</u>

$$g'(\theta) = -3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta + 3\cos^2\theta$$

$$= 3(\operatorname{sen}^3\theta - \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^2\theta + 1 - \operatorname{sen}^2\theta)$$

$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta \longleftarrow$

$$= 3(\operatorname{sen}^3\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta + 1) = 0$$

Por el T$^{\underline{ma}}$ del Resto, sabemos que esta ecuación de tercer grado no tiene raíces enteras.

Debemos resolver una ecuación de $3^{\underline{er}}$ grado

$$y^3 - 2y^2 - y + 1 = 0 \quad \text{con} \quad y \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = [-0'70, 0'70]$$

ó

$$\operatorname{sen}^3\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta + 1 = 0 \quad \text{con} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Observad que, llamando $h(y) = y^3 - 2y^2 - y + 1$ con

$y \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = [-0'70, 0'70]$, se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} h(-0'70) > 0 \\ h(0) = 1 > 0 \\ h(0'5) = 0'125 > 0 \\ h(0'70) < 0 \end{array}\right\} \text{cambio de signo}$$

Por el T^{ma} de Bolzano, concluimos que existe al menos una raíz en $(0'5, 0'7)$. Por otro lado, estudiando la derivada

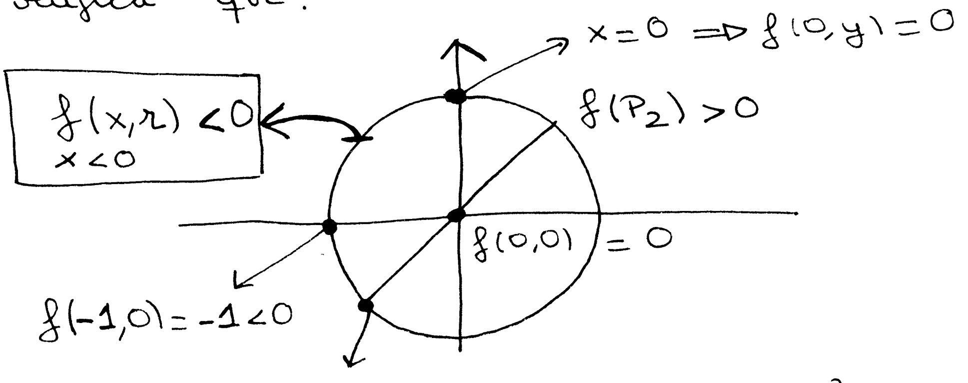
$$h'(y) = 3y^2 - 4y - 1 = 0 \iff y = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} = \begin{cases} 1'548 \\ -0'215 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} h'(-0'70) = 3'27 > 0 \\ h'(-0'215) = 0 \end{array}\right\} h \text{ crece}$$

$$\left.\begin{array}{l} h'(0) = -1 < 0 \\ h'(0,70) < 0 \end{array}\right\} h \text{ decrece}$$

Luego en $(0'5, 0'7)$ h decrece $\Rightarrow$ $h(y)$ tiene una única raíz en $[-0'70, 0'70]$. Más aún, sabemos que la raíz pertenece a $(0'5, 0'7)$. Llamemos r a esa raíz.

Se verifica que:



$f(x,y) = x^3 + 3xy$

vi) Comparación del valor de la función en los puntos obtenidos

$f(P_1) = f(0,0) = 0$

$\boxed{f(P_2) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{6+\sqrt{2}}{4} > 0}$

$f(P_3) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{6-\sqrt{2}}{4} > 0$

$\boxed{f(-\sqrt{1-r^2}, r) < 0}$

En P_2 la función alcanza su valor máximo.

En $(-\sqrt{1-r^2}, r)$ la función alcanza su valor mínimo.

Sabemos que $r \in (0'5, 0'7)$. Para calcular exactamente su valor recurrimos al ordenador y concluimos que $r = 0,554981320$

La forma general de la ecuación de **tercer grado** (o cúbica) es:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Las ecuaciones de **tercer grado** tienen **3** soluciones (o raíces, como se vio en Conjuntos y Números).

En su forma más general, estas **3 soluciones** se pueden representar así:

Primera solución:

$$x = -\frac{b}{3a} - \frac{2^{1/3}(-b^2+3ac)}{3a\left(-2b^3+9abc-27a^2d+\sqrt{4(-b^2+3ac)^3+(-2b^3+9abc-27a^2d)^2}\right)^{1/3}} + \frac{\left(-2b^3+9abc-27a^2d+\sqrt{4(-b^2+3ac)^3+(-2b^3+9abc-27a^2d)^2}\right)^{1/3}}{3\,2^{1/3}a}$$

Segunda solución:

$$x = -\frac{b}{3a} + \frac{(1+i\sqrt{3})(-b^2+3ac)}{3\,2^{2/3}a\left(-2b^3+9abc-27a^2d+\sqrt{4(-b^2+3ac)^3+(-2b^3+9abc-27a^2d)^2}\right)^{1/3}} - \frac{(1-i\sqrt{3})\left(-2b^3+9abc-27a^2d+\sqrt{4(-b^2+3ac)^3+(-2b^3+9abc-27a^2d)^2}\right)^{1/3}}{6\,2^{1/3}a}$$

Tercera solución:

$$x = -\frac{b}{3a} + \frac{(1-i\sqrt{3})(-b^2+3ac)}{3\,2^{2/3}a\left(-2b^3+9abc-27a^2d+\sqrt{4(-b^2+3ac)^3+(-2b^3+9abc-27a^2d)^2}\right)^{1/3}} - \frac{(1+i\sqrt{3})\left(-2b^3+9abc-27a^2d+\sqrt{4(-b^2+3ac)^3+(-2b^3+9abc-27a^2d)^2}\right)^{1/3}}{6\,2^{1/3}a}$$

La segunda y tercera fórmula son iguales salvo por un signo "+ ó -" al comienzo, y otro signo "+ ó -" hacia la mitad. Nótese que la segunda y tercera fórmula contienen a la unidad imaginaria *i*.

Resolviendo nuestro problema con el programa matemático Derive, se obtiene:

#1: $x^3 - 2\cdot x^2 - x + 1 = 0$

#2: $\text{SOLVE}(x^3 - 2\cdot x^2 - x + 1 = 0,\ x)$

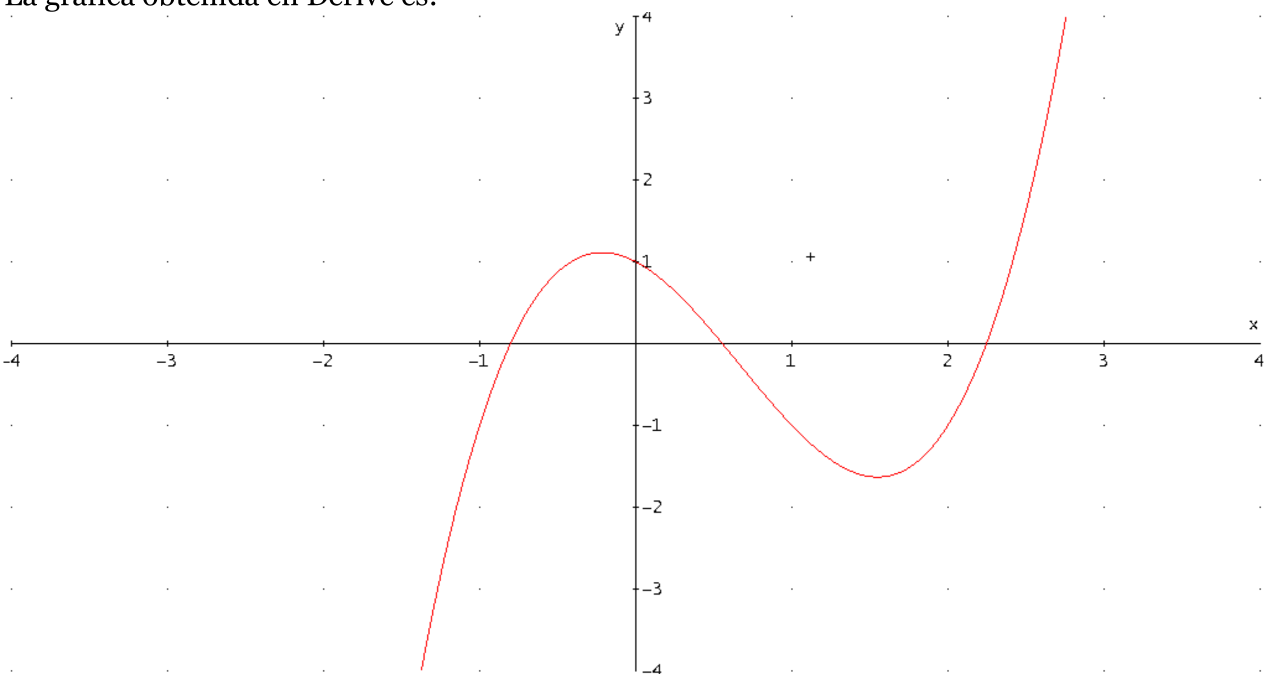
#3: $$x = \frac{2}{3} - \frac{2\cdot\sqrt{7}\cdot\text{COS}\left(\frac{\text{ACOT}\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)}{3}\right)}{3} \vee x = \frac{2\cdot\sqrt{7}\cdot\text{SIN}\left(\frac{\text{ATAN}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)}{3} + \frac{\pi}{3}\right)}{3} + \frac{2}{3} \vee x = \frac{2}{3} - \frac{2\cdot\sqrt{7}\cdot\text{SIN}\left(\frac{\text{ATAN}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)}{3}\right)}{3}$$

#4: $x = -0.8019377357 \vee x = 0.5549581320 \vee x = 2.246979603$

Si escribimos la función:

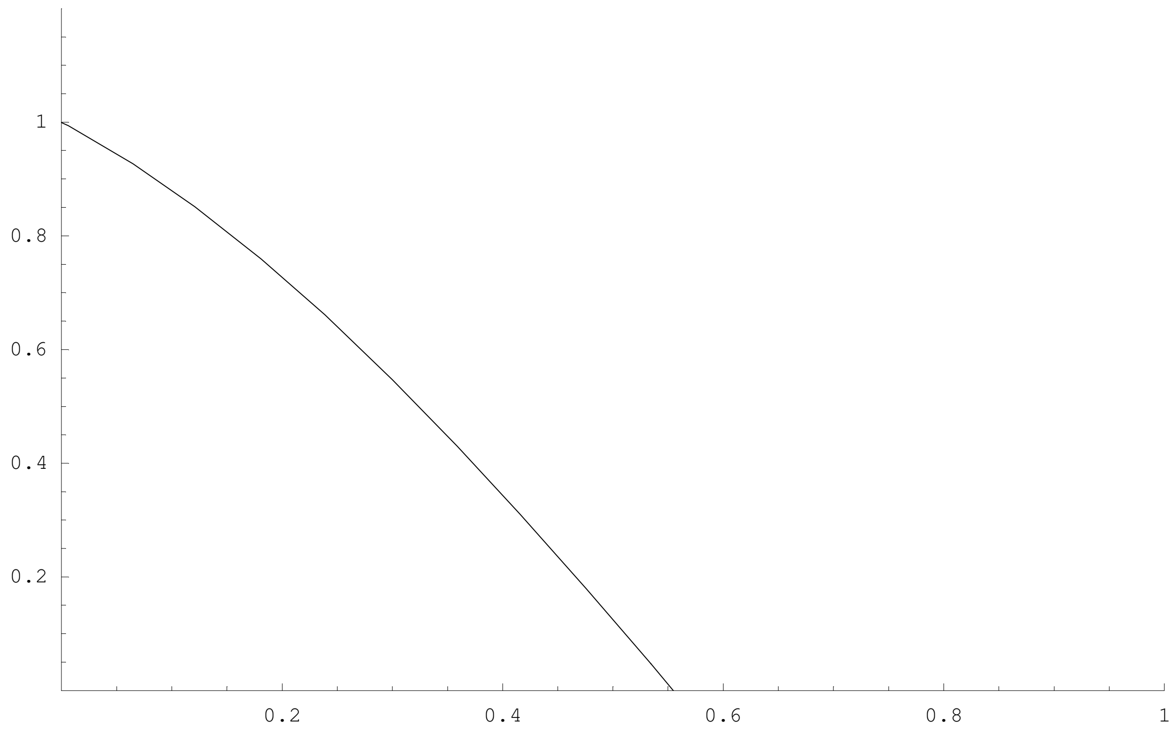
$$y=x^3-2\,x^2-x+1$$

La gráfica obtenida en Derive es:



Otra posibilidad es usar el programa Mathematica

Plot$\left[x^3 - 2x^2 - x + 1, \left\{x, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}, \text{PlotRange} \to \{\{0, 1\}, \{0, 1.2\}\}\right];$



N[Solve[$x^3 - 2x^2 - x + 1 == 0$**, x]]**

$\{\{x \to 2.24698 + 5.55112 \times 10^{-17}\, i\},$
$\{x \to -0.801938 + 1.66533 \times 10^{-16}\, i\}, \{x \to 0.554958 - 2.22045 \times 10^{-16}\, i\}\}$

Plot$\left[\text{Sin}[\theta]^3 - 2\,\text{Sin}[\theta]^2 - \text{Sin}[\theta] + 1, \left\{\theta, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}\right];$