Ejercicios adicionales

1.- Calcular el ángulo formado por el vector $(1,0,1)$ y la dirección de máxima variación de la función $f(x,y,z) = x^3y + z^3y^2$ en el punto $(0,1,1)$.

2.- Se considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3+4y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(a) Decidir razonadamente si es diferenciable en $(0,0)$.

(b) Determinar si la función $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$.

3.- Explicar por qué $K = \{(x,y) :\ 4x^2 + y^2 \leq 25\}$ es compacto.
Hallar razonadamente los extremos de la función $f(x,y) = x^4 + x^2 + 2y^2$ en K.

4.- Explicar por qué $K = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leq 9\}$ es compacto y hallar los máximos y mínimos de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{1+(x-2)^2+y^2}$$

sobre el conjunto K. ¿Por qué se alcanzan?

5.- Calcular la integral $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, donde

$$D = \{(x,y) :\ x < x^2 + y^2 < 2x\}\,.$$

6.- Calcular la integral triple $\displaystyle\iiint_S (x^2+y^2+3z^2)\,dx\,dy\,dz$, donde

$$S = \{(x,y,z) :\ x^2+y^2 \leq 4\,, -1 \leq z \leq 4\}\,.$$

7.- Dado el sólido $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \leq z-1\,,\ 0 \leq z \leq 4\}$, calcular su volumen $V(S)$.

8.- (a) ¿Qué representa geométricamente el sólido

$$S = \{(x,y,z) :\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}?$$

(b) Calcular la integral triple

$$\iiint_S \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}\,.$$

9.- Definir y dibujar en coordenadas cartesianas el sólido D que en coordenadas esféricas viene dado por

$$0 \leq r \leq 2a\cos\varphi\,, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}\,, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\,.$$

10.- Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada f' continua en $[0,1]$, tal que $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) = 1$, $f'(1) = -1$ y $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$. Sea

$$C = \{(x, f(x)) :\ x \in [0,1]\} \cup \{(x, -f(x)) :\ x \in [0,1]\}\,.$$

(a) Hallar una parametrización γ de C, con la orientación positiva del plano.

(b) Calcular

$$\int_\gamma y^2\,dx + xy\,dy\,.$$

(c) Demostar que

$$\frac{1}{4}\int_\gamma x\,dy - y\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt\,.$$