Hoja 8

Integrales de funciones y de campos de fuerza a lo largo de una curva (integrales de línea y de trayectoria). Fórmula de Green

1.- Dibujar el arco de cicloide descrito por

$$\begin{cases} x = R\,(t - \operatorname{sen} t), \\ y = R\,(1 - \cos t), \end{cases}$$

con $0 \le t \le 2\pi$ y hallar su longitud.

2.- Hallar la longitud del arco de hipocicloide descrito por

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t, \\ y(t) = \operatorname{sen}^3 t, \end{cases}$$

con $0 \le t \le \pi/2$.

3.- Dada la curva γ mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = t\,\cos t\,, \quad y = t \operatorname{sen} t\,, \quad z = t\,, \quad 0 \le t \le 2\pi\,,$$

(a) hallar el vector tangente unitario a la curva en el punto $(0, \pi/2, \pi/2)$;

(b) calcular la integral $\displaystyle\int_\gamma z\, ds$;

(c) determinar la longitud de γ.

4.- En los siguientes casos, dibujar la curva descrita por la trayectoria σ y hallar la integral $\displaystyle\int_\sigma f\, ds$.

(a) $f(x, y, z) = x + y + z\,, \quad \sigma(t) = (\operatorname{sen}\, t, \cos t, t)$, $0 \le t \le \pi$.

(b) $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{y + z}\,, \quad \sigma(t) = \Big(t, \dfrac{2}{3}\, t^{\frac{3}{2}}, t\Big)$, $1 \le t \le 2$.

5.- Hallar la integral $\displaystyle\int_\Gamma F(x, y)\, ds$ del campo vectorial F a lo largo de la curva orientada Γ que se indica. Dibujar en cada caso el camino de integración.

(a) $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, a lo largo de la curva $y = 1 - |1 - x|$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 0)$.

(b) $F(x, y) = (x + y, x - y)$, siendo Γ la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

(c) $F(x, y) = (2 - y, x)$ a lo largo del camino descrito por la cicloide $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

6.- Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sea $F(x, y)$ el vector unitario que apunta desde (x, y) hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo que realiza el campo F para desplazar una partícula desde la posición $(2a, 0)$ hasta $(0, 0)$ a lo largo de la semicircunferencia superior de $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

7.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma (x^2 + y^2)\, dx + (x^2 - y^2)\, dy$, donde Γ es el contorno del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, orientado positivamente.

8.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma y\, dx + x^2\, dy$, cuando Γ es: a) la circunferencia $x^2 + y^2 = a\, x$; b) la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

9.- Hallar el trabajo que realiza el campo $F(x, y) = (y^2 + x^3, x^4)$ al recorrer el contorno del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en el sentido de las agujas del reloj.

10.- Calcular el flujo de los campos $F(x,y) = (y,-x)$ y $G(x,y) = (x,y)$ hacia el exterior del disco unidad $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

11.- Calcular la integral $\int_\Gamma (x^4 - x^3 e^x - y)\, dx + (x - y \arctan y)\, dy$, donde Γ viene dado como sigue: dados los puntos $A = (2,0)$, $B = (1,-1)$ y $C = (0,-1)$ de $\mathbb{R}^2$, Γ es el camino formado por el arco AB de la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 1, y los segmentos orientados BC, CO, OA (O es el origen de coordenadas).

12.- Sean $r > 0$, $D = \left\{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leq r^2\right\}$ y ∂D su frontera. Usando primero el teorema de Green y luego las coordenadas polares, calcular la integral

$$\int_{\partial D} xy^2\, dy - yx^2\, dx\,.$$

13.- Evaluar $\int_\Gamma (2\,x^3 - y^3)\, dx + (x^3 + y^3)\, dy$ donde Γ es el círculo unidad.

14.- Verificar el teorema de Green para el campo (P,Q) con $P(x,y) = 2\,x^3 - y^3$ y $Q(x,y) = x^3 + y^3$ y la región anular (corona) $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\,a^2$.

15.- Sea A el área del recinto acotado por una curva γ de clase C^1, simple y cerrada en el plano y orientada en el sentido positivo. Calcular la integral de línea

$$\int_\gamma x\, dy - 4y\, dx$$

en función de A.

16.- Calcular el área del interior de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ usando la fórmula de Green.