Hoja 7

Cambio de variables. Integrales múltiples impropias. Principio de Cavalieri

1.- En cada uno de los siguientes casos, dibujar la región Ω y expresar la integral

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

como una integral iterada en coordenadas polares.

(a) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, donde $a > 0$.

(b) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

(c) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$.

2.- Consideremos la aplicación definida por

$$\begin{cases} x = u + v\,, \\ y = v - u^2\,. \end{cases}$$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u,v)$.

(b) Calcular la imagen Ω mediante esta transformación del triángulo T de vértices $(0,0), (2,0), (0,2)$.

(c) Calcular $\displaystyle\iint_\Omega \frac{1}{(x-y+1)^2}\,dx\,dy$.

3.- Hallar el valor de la integral

$$\iint_\Omega e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy\,,$$

donde Ω es el triángulo determinado por la recta $x + y = 2$ y los dos ejes coordenados. Utilícese un cambio lineal de variables.

4.- Se considera la aplicación definida por

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2\,, \\ y = 2\,uv\,. \end{cases}$$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u,v)$.

(b) Determinar la imagen Ω mediante esta transformación del rectángulo R cuyos vértices son $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,3)$ y $(1,3)$.

(c) Calcular el área de Ω.

5.- Demuéstrese la igualdad

$$\iint_\Omega f(xy)\,dx\,dy = \log 2 \int_1^2 f(u)\,du\,,$$

siendo Ω la región del primer cuadrante limitada por las líneas

$$xy = 1\,, \qquad xy = 2\,, \qquad \frac{y}{x} = 1\,, \qquad \frac{y}{x} = 4\,.$$

6.- Para cada $r > 0$ considérese $I(r) = \displaystyle\int_{-r}^{r} e^{-t^2}\,dt$.

(a) Demostrar que

$$I(r)^2 = \iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,,$$

siendo R el cuadrado $R = [-r,r] \times [-r,r]$.

(b) Sean D_1 y D_2 los discos inscritos en y circunscritos a R, respectivamente. Demostrar que

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy < I(r)^2 < \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy\,.$$

(c) Calcular las integrales sobre estos discos mediante el cambio a coordenadas polares. Deducir que $I(r) \to \sqrt{\pi}$ cuando $r \to +\infty$. Obsérvese que esto significa

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

7.- Calcular la integral

$$I(p,r) = \iint_{D_r} \frac{dx\, dy}{(p^2+x^2+y^2)^p}$$

sobre el disco $D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq r^2\}$. Determinar los valores de p para los que $I(p,r)$ tiene límite cuando $r \to +\infty$.

8.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular las siguientes integrales. Dibujar el recinto de integración en cada caso.

(a) $\displaystyle\iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2+9)^2}\, dx\, dy\, dz$, siendo B la bola de radio 3 centrada en el origen de coordenadas.

(b) $\displaystyle\iiint_\Omega x\, y\, z\, dx\, dy\, dz$ con $\Omega = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x,y,z \geq 0\big\}$.

(c) $\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz$, siendo D la corona entre las esferas de radios a y $2\,a$.

9.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular $\displaystyle\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es el recinto acotado con frontera $\partial\Omega = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = z\big\}$.

10.- Determinar y dibujar el recinto de integración y hallar el valor de las siguientes integrales, cambiando a coordenadas cilíndricas.

(a) $\displaystyle\iiint_\Omega (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $x^2+y^2 = 2\,z$ y el plano $z = 2$.

(b) $\displaystyle\iiint_\Omega dx\, dy\, dz$, siendo Ω la región limitada por los planos coordenados, $z = x^2+y^2$ y $x+y = 1$.

(c) $\displaystyle\iiint_\Omega ((x+y)^2 - z)\, dx\, dy\, dz$, siendo Ω el cono limitado por $(z-1)^2 = x^2+y^2$ y el plano $z = 0$.

11.- Hallar el volumen del sólido de revolución $z^2 \geq x^2+y^2$ encerrado por la superficie $x^2+y^2+z^2 = 1$.

12.- Calcular el volumen de los siguientes sólidos.

(a) El limitado superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2 = 5$ e inferiormente por el paraboloide $x^2+y^2 = 4\,z$.

(b) El limitado por el plano $z = 0$, el cilindro $x^2+y^2 = 2x$ y el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

(c) El cuerpo acotado $K \subset \mathbb{R}^3$ cuya frontera viene dada por $\displaystyle\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{15}} = 1$.

13.- Demostrar que el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ es $A = \pi\, a\, b$. Utilizar este resultado y el principio de Cavalieri para demostrar que el volumen limitado por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$ es $V = \dfrac{4}{3}\pi abc$.

14.- Sea T el toro sólido en $\mathbb{R}^3$ obtenido al girar el círculo $(y-a)^2+z^2 = b^2$ del plano $x = 0$ alrededor del eje Z. Utilizar el principio de Cavalieri para calcular que el volumen de T es $2\,\pi^2\, a\, b^2$.