

Hoja 6

Integración dobles y triples. Teorema de Fubini

1.- Sea f la función definida para $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Demostrar que f no es integrable en el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

(b) Estudiar la existencia de las integrales iteradas

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy \quad \text{y} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

2.- Sea f definida en $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Demuéstrese que la integral de f sobre Q existe y que su valor es 0. Comprobar que f es discontinua en todos los puntos de la diagonal $\{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\}$ de Q y continua en todos los demás puntos del cuadrado.

3.- Demostrar la existencia de la integral $\int_Q f(x+y) dx dy$, donde $Q = [0, 2] \times [0, 2]$ y $f(t) = [t]$ representa el mayor número entero $\leq t$. Hallar el valor de la integral.

4.- Definimos $f(x, y)$ en el cuadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 2y & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Probar que la integral iterada $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ existe y es igual a 1.

(b) Demostrar que, no obstante, f no es integrable en Q .

5.- Hallar el valor de las siguientes integrales sobre los rectángulos indicados. Explicar, en cada caso, la existencia de la integral.

$$(a) \int_Q x^2 e^y dx dy, \quad Q = [-1, 1] \times [0, \log 2]; \quad (b) \int_Q |\cos(x+y)| dx dy, \quad Q = [0, \pi] \times [0, \pi];$$

$$(c) \int_Q |xy| dx dy, \quad Q = [-1, 2] \times [1, 3]; \quad (d) \int_Q \operatorname{sen}^2(3x-2y) dx dy, \quad Q = [0, \pi] \times [0, \pi].$$

6.- Para cada una de las siguientes funciones f definidas en el rectángulo $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, se pide representar el conjunto de los valores $f(x, y)$ sobre Q y calcular el volumen del sólido así obtenido. Determinar también el conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in Q : f \text{ no es continua en } (x, y)\}$$

y explicar la existencia de las integrales utilizadas.

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} 1 - (x+y) & \text{si } x+y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (b) f(x, y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

7.- Dibujar la región de integración, estudiar la existencia de la integral y calcular su valor en cada uno de los casos siguientes.

(a) $\int_{\Omega} x \cos(x+y) dx dy$, siendo Ω el triángulo de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$ y (π,π) .

(b) $\int_{\Omega} x^2 y^2 dx dy$, siendo Ω la región acotada del primer cuadrante situada entre las hipérbolas $xy = 1$ y $xy = 2$ y las rectas $y = x$ e $y = 4x$.

8.- Calcular $\iint_D y dx dy$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 2x/\pi \leq y \leq \sin x\}$.

9.- Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$. Dibujar esta pirámide y luego calcular su volumen: a) de manera elemental; b) integrando.

10.- Hallar el volumen de la región encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 10$.

11.- En los siguientes apartados, se supone que la integral de una función positiva f sobre la región Ω se reduce a la integral iterada que se da. En cada caso, se pide determinar y dibujar la región Ω e invertir el orden de integración.

(a) $\int_0^2 \left(\int_{y^2}^{2y} f(x,y) dx \right) dy$.

(b) $\int_1^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y) dy \right) dx$,

(c) $\int_1^e \left(\int_0^{\log x} f(x,y) dy \right) dx$.

(d) $\int_0^{\pi} \left(\int_{-\sin x/2}^{\sin x} f(x,y) dy \right) dx$.

12.- Invertiendo el orden de integración si fuese necesario, calcúlese la integral

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2} dx dy.$$

13.- Observando que $\int_{[a,b] \times [a,b]} f(x)f(y) dx dy = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2$, demostrar que

$$2 \int_a^b \int_x^b f(x)f(y) dx dy = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2.$$

14.- Si $D = [-1, 1] \times [-1, 2]$, probar que

$$1 \leq \iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1} \leq 6.$$

15.- Hallar el valor de las siguientes integrales, determinando y dibujando en cada caso el recinto de integración.

(a) $\int_Q (2x + 3y + z) dx dy dz$, con $Q = [1, 2] \times [-1, 1] \times [0, 1]$.

(b) $\int_T x^2 \cos z dx dy dz$, siendo T la región limitada por los planos $z = 0, z = \pi, y = 0, y = 1, x = 0, x + y = 1$.

(c) $\int_{\Omega} x y^2 z^3 dx dy dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $z = xy$ y los planos $y = x, x = 1$ y $z = 0$.

16.- En cada uno de los siguientes casos, la integral $\int_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz$ de la función positiva f se reduce a la integral iterada dada. Dibujar la región de integración $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y su proyección sobre el plano $z = 0$. Escribir entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que integración se hace en el orden $dz dx dy$.

(a) $\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^y f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx$.

(b) $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{x+y} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx$.

(c) $\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx$.

(d) $\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2-y^2}}^1 f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx$.