Hoja 2

1.- Dibujar las curvas de nivel y la gráfica de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x,y) = x + y - 2$ (b) $f(x,y) = x^2 + 4\,y^2$ (c) $f(x,y) = -x^2\,y^2$

(d) $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)$ (e) $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)$ (f) $f(x,y) = x^3 - x$

(g) $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$ (h) $f(x,y) = \text{máx}\,\{|x|, |y|\}$ (i) $f(x,y) = \cos^2(x^2 + y^2)$

2.- Dibujar las superficies de nivel de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x,y,z) = x - y - z + 2.$ (b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2.$

(c) $f(x,y,z) = y\,(x+z).$ (d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$

(e) $f(x,y,z) = \cos((x^2 + y^2) - z).$ (f) $f(x,y,z) = x - y.$

(g) $f(x,y,z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2).$ (h) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - z.$

3.- Hallar los límites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5\,x^2 \operatorname{sen} y^2 + y^2 e^{-|x|}}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{\text{máx}\{|x|, |y|\}}{\sqrt{x^4+y^4}}.$$

4.- En cada una de las funciones que siguen, se pide determinar los conjuntos de puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ donde están definidas y donde son continuas.

(i) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4\,x^2 y^2.$ (j) $f(x,y) = \tan \dfrac{x^2}{y}.$ (k) $f(x,y) = \dfrac{1}{\log\sqrt{x^2+y^2}}.$

(l) $f(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}.$ (m) $f(x,y) = \dfrac{\cos x^2}{x-y}.$ (n) $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

5.- Sea

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

definida para los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x + y \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to 0} \big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = -1.$$

¿Existe el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$?

6.- Sea $f(x,y)$ definida mediante

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

en los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2y^2 + (x-y)^2 \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = \lim_{y\to 0} \big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = 0$$

y que no existe el $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

7.- Demostrar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} + x \operatorname{sen} \dfrac{1}{y} & \text{si } x, y \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tiene límite cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ y que, sin embargo, no existen los límites iterados

$$\lim_{x\to 0} \big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to 0} \big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big).$$

8.- Para cada $(x, y) \neq (0, 0)$ se define

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Hallar el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la rectas $y = \lambda x$. ¿Es posible definir $f(0, 0)$ de modo que f sea continua en $(0, 0)$?

9.- ¿Se pueden hacer continuas las funciones

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

definiéndolas de forma adecuada en $(0, 0)$?

10.- Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \leq 0 \quad \text{ó} \quad y \geq x^2, \\ & \\ 1 & \text{si} \quad 0 < y < x^2. \end{cases}$$

Demostrar que $f(x, y) \longrightarrow 0$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen. Hallar una curva que pase por el origen a lo largo de la cual (salvo en el origen) $f(x, y)$ tiene el valor constante 1. ¿Es f continua en el origen?

11.- (*) Existe el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$ y es igual a 1. ¿Cierto o falso?

12.- Estudiar si son abiertos o cerrados los siguientes conjuntos, utilizando razonamientos con funciones continuas.

$$\begin{aligned}
A &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5\,x^2 + 6\,y^2 = 30\big\}, \\
B &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 + \operatorname{sen}^2(x + y)\big\}, \\
C &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4\,x^6 + 2\,y^2 + z^4 < 5\big\}, \\
D &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x\,y > 1,\ \exp\big((x^2 + y^2) - 5\big) < 1\big\}, \\
E &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y^2)^4 \geq 1\big\}.
\end{aligned}$$

¿Son acotados o compactos algunos de ellos? ¿Cuáles?