Hoja 1

1.- Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple

(a) $2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$ (ley del paralelogramo).

(b) $\|x-y\| \cdot \|x+y\| \le \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(c) $\langle x, y\rangle = 0$ si y sólo si $\|x+y\| = \|x-y\|$.

(d) $\langle x, y\rangle = 0$ si y sólo si $\|x+\lambda\, y\| \ge \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(e) $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \le \|x-y\|$.

Interpretar estos hechos geométricamente en términos del paralelogramo formado por los vectores x e y.

2.- (a) Hallar todos los valores de a y b para los que los vectores $x = (4, b, 1)$ e $y = (a, b, 0)$ de $\mathbb{R}^3$, son ortogonales. ¿Cuál es el lugar geométrico del plano determinado por tales a y b?

(b) Hallar dos vectores ortogonales a $(1,1,1)$ que no sean paralelos.

3.- Sean $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Determinar el ángulo entre los vectores $u = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $v = \sqrt{5/3}\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(b) Explicar la diferencia entre los valores $\|3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}\| \cdot \|2\mathbf{j} + \mathbf{k}\|$ y $|(3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} + \mathbf{k})|$. ¿Es posible que sean iguales? ¿Puede decidirse eso sin calcular sus valores exactos?

4.- Comprobar que las siguientes funciones tienen todas las propiedades que se requieren de una métrica:

(a) En $\mathbb{R}$: $d(x,y) = |x-y|/(1+|x-y|)$ y también $d(x,y) = \operatorname{arc\,tg}|x-y|$.

(b) En $\mathbb{R}^n$: $d_\infty(x,y) = \max\limits_{1\le k\le n} |x_k - y_k|$ y también $d_1(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$.

5.- Hallar, si existe, el límite de la sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}^2$ cuando

$$x_k = \Big(\frac{\log k}{k}\,,\, k^{1/k}\Big), \quad x_k = \Big(\sqrt{k^2+2} - k\,,\, \frac{1}{k^k}\Big), \quad x_k = \Big((-1)^k\,,\, \frac{1}{k}\Big), \quad x_k = \Big(\cos\frac{k\pi}{2}\,,\, \frac{1}{k}\operatorname{sen}\Big(k^2 + \frac{\pi}{2}\Big)\Big).$$

6.- Hallar, si existe, el límite de la sucesión $\{x_k\}_k$ en $\mathbb{R}^2$ cuando

$$x_k = \Big(a_k, \frac{1}{a_k - 2}\Big)$$

y la sucesión $\{a_k\}_k$ de números reales está definida mediante

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad 7\,a_{k+1} = a_k^3 + 6, \qquad \text{para cada } k \ge 1.$$

(Indicación: demostrar que $\{a_k\}_k$ es creciente y que cada $a_k < 1$.)

7.- Para cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, determinar su frontera y si son abiertos o cerrados.

$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le x\big\}$, $\quad B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3\,x^2 + 2\,y^2 < 6\big\}$,

$C = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\big\}$, $\quad D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1,\ |z+1| \le 4\big\}$,

$E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\big\}$, $\quad F = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2-1)\,(4-x^2-y^2) > 0\big\}$,

$G = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\,y > 1\big\}$, $\quad H = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z < 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\big\}$.

8.- Calcular el cierre, el interior y la frontera de los siguientes conjuntos:

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| < 1\big\},$$

$$B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1,\ x^2+y^2+z^2 \le 1\big\}.$$

9.- (a) Sea A el conjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión del segmento horizontal $I_0 = \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\}$ y los segmentos verticales cerrados I_n de altura 1 y de extremo inferior $P_n = (1/n, 0)$, $n = 1,2,3,\ldots$ Demostrar que A no es cerrado (Indicación: falta el segmento vertical en $x = 0$).

(b) Sea

$$B = \left\{ \left(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\}.$$

Demostrar que B no es cerrado. (Indicación: utilizar la caracterización de cerrados por medio de sucesiones).

10.- ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son compactos?

$$\begin{aligned} A &= \big\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1,\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big\}, \\ B &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\big\}, \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\,y \geq 1\} \bigcap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}\,. \\ D &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \leq 9\}\,. \end{aligned}$$

11.- Demostrar que la unión arbitraria de abiertos es abierta. Mediante un ejemplo, comprobar que aunque sea abierto cada A_i de una familia infinita $\{A_i\}_i$, la intersección $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ no es necesariamente un conjunto abierto. ¿Qué ocurre con las familias de conjuntos cerrados?

12.- Demostrar que toda unión finita de conjuntos compactos es compacta y que toda intersección arbitraria de compactos es compacta.

13.- Decimos que x es un *punto de acumulación* de $E \subset \mathbb{R}^n$ si toda bola abierta de centro x contiene un punto de E distinto de x. Escribimos E' para denotar al conjunto de puntos de acumulación de E.

(a) Dado el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por $A = \left\{ \dfrac{1}{k} : k = 1,2,\ldots \right\}$, hallar A'. Lo mismo para $A = \mathbb{Q}$.

(b) Probar que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.

(c) Probar que $\overline{E} = E \cup E'$.

14.- Probar que $\mathbb{R}^n$ es completo, (es decir, que toda sucesión de Cauchy es convergente) siguiendo los siguientes pasos:

(a) Probar que $\operatorname{máx}\big\{|a_1|,\ldots,|a_n|\big\} \leq \|a\| \leq \sqrt{n}\, \operatorname{máx}\big\{|a_1|,\ldots,|a_n|\big\}$ donde $a = (a_1,\ldots,a_n)$. (Compárese con un ejercicio anterior sobre las distintas métricas.)

(b) Sea $\{v_k\}_k$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ tal que $v_k = (v_k^1,\ldots,v_k^n)$. Probar que $\{v_k\}_k$ es de Cauchy si y sólo si las sucesiones de números reales $\{v_k^1\}_k,\ldots,\{v_k^n\}_k$ son de Cauchy en $\mathbb{R}$.

(c) Usando que $\mathbb{R}$ es completo, concluir que $\mathbb{R}^n$ es completo.