Cálculo II | **1º de Matemáticas**

18 de junio de 2008 | Examen Final

Apellidos y Nombre ______________________________

D. N. I. ______________________________

Firma ______________________________

1. Se considera la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(1,0) \end{cases}$$

(a) Demuestra que f no es continua en $(1,0)$.

(b) Prueba que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existen en $(1,0)$.

2. Sea f una función diferenciable definida en $\mathbb{R}^2$ con valores reales y definir $g(s,t)=f(s^2-t^2,t^2-s^2)$.

(a) Explica razonadamente por qué g es diferenciable

(b) Calcula $\dfrac{\partial g}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial t}$.

(c) Demuestra que $t\dfrac{\partial g}{\partial s}+s\dfrac{\partial g}{\partial t}=0$.

3. Se considera la función $f(x,y)=4xy^2-x^2y^2-xy^3$ y la región triangular D cerrada en el plano xy con vértices $(0,0),(0,6)$ y $(6,0)$.

(a) Determina los puntos críticos de f en el interior del triángulo D.

(b) Calcula los valores máximo y mínimo de f en D.

4. Calcula la integral triple

$$\int\int\int_W x\, e^{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dx\, dy\, dz\,,$$

donde W es el sólido comprendido entre las superficies esféricas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante.

5. Calcula el volumen del sólido E comprendido entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2+y^2 = 4$, encima del plano xy y debajo del plano $z = x+2$.

6. Sea S_R la esfera de centro 0 y radio R en el espacio. Calcula

$$\lim_{R\to 0}\int\int\int_{S_R} \sqrt{x^2 +^2 +z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\, dx\, dy\, dz\,.$$

7. (a) Utiliza el teorema de Green para calcular la integral

$$I = \oint_C y^2\, dx + x^2\, dy$$

donde C es el triángulo de vértices $(1, 0), (0, 1)$ y $(1, 0)$ orientado en el sentido de las aguja del reloj.

(b) Halla directamente la integal I de la parte (a) de este problema.