ANÁLISIS MATEMÁTICO II. Curso Primero. Ingeniería Informática. UAM.
Departamento de Matemáticas.

SOLUCIONES

HOJA 1

1. $\sqrt{38}/2$.

2. 1.

3. a) $(0,0,\pm 1)$. b) $\frac{\pm 1}{7\sqrt{483}}(113,17,-103)$.

4. a) $x+y+z=1$. b) $5x+2z=25$.

5. $-x-y+z+3=0$.

6. $3/\sqrt{6}$.

7. $10x-17y+z+25=0$.

8. $y+z-1=0$.

HOJA 2

1. Las curvas de nivel son de la forma $(x+2)^2+y^2=k/2$. Si $k<0$ las curvas de nivel son vacías, si $k=0$ corresponden al punto $(-2,0)$ y si $k>0$ son circunferencias de centro $(-2,0)$ y radio $\sqrt{k/2}$. Las secciones que resultan de la intersección de la gráfica de f con los planos $x=-2$, $y=0$ son parábolas. La gráfica de f es un paraboloide.

2. Las curvas de nivel son de la forma $x^2/2+y^2=1-\log(1-k)$. Las curvas de nivel son vacías si $k<1-e$ y si $k\geq 1$. Si $k=1-e$ la única curva de nivel es el punto $(0,0)$ y si $k\in(1-e,1)$ son elipses. $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y)=1$.

3. Las curvas de nivel son de la forma $(x-1)^2+y^2=k$. Si $k<0$ las curvas de nivel son vacías, si $k=0$ corresponden al punto $(1,0)$ y si $k>0$ son circunferencias de centro $(1,0)$ y radio $\sqrt{k}$. Las secciones que resultan de la intersección de la gráfica de f con los planos $x=1$, $y=0$ son parábolas. La gráfica de f es un paraboloide.

4. Las curvas de nivel de $f(x,y)$ son:

- Rectas: $\cos(y/2-3x)$, $e^{\sqrt{3x+2y}}$.
- Elipses: $e^{\sqrt{3x^2+2y^2}}$, $4-\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{2}+y^2}}$.
- Parábolas: $e^{y-2x^2}+3$.
- Hipérbolas: $e^{\sqrt{y^2-x^2}}$, $e^{\sqrt{3x^2-2y^2}}$, $\operatorname{sen}(y^2-x^2)$.

5. La afirmación verdadera es la a).

6. La afirmación verdadera es la b).

7. La afirmación verdadera es la c).

8. La afirmación verdadera es la b).

HOJA 3

1. a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+2}=0$. b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x)-1+x^2/2}{x^4+y^4}$ no existe.

2. a) La función puede hacerse continua definiendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y} & \text{si } y \neq -x, \\ 1 & \text{si } y = -x. \end{cases}$$

b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ no puede hacerse continua en $(0,0)$ ya que no existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

3. Vector velocidad: $c'(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 3\sqrt{t})$. Recta tangente en $t=0$: $\{(\lambda, 1, 0),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x}{3y^2+e^y}$.

5. $2x + y - z = 0$.

6. El plano $z = 0$ es el plano tangente a ambas funciones en (0,0). Por tanto, $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son tangentes en $(0,0)$.

7. $\dfrac{\partial f}{\partial v}(4,-2,-1) = \dfrac{15}{\sqrt{14}}$.

8. La función es continua en $(0,0)$. Por la definición se comprueba que $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$.

9. Se comprueba por la definición que existen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Para ver que f no es continua en $(0,0)$ se pueden tomar límites a lo largo de las curvas $x = my^2$, $m \in \mathbb{R}$.

10. $\dfrac{1}{2}\left(\pi + \dfrac{1}{\pi}\right)$.

11. La afirmación verdadera es la d).

12. $a = 1/2$.

13. $2/\sqrt{5}$.

HOJA 4

1. La función en el apartado c) no es continua y por tanto tampoco diferenciable.

2. La pendiente de la recta tangente es $\dfrac{dy}{dx}(1) = 0$.

3. $z = 0$.

4. En la dirección $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

5. $x + y + z = 3$.

6. La afirmación verdadera es la b).

7. $x + y - \sqrt{2}z = 1$.

8. $DF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. $DG\big(F(1,1)\big) = \dfrac{-e}{1+10e}\begin{pmatrix} -1/e & -3 \\ -3 & 1+e \end{pmatrix}$.

10. $\{(\lambda, \lambda, 3-2\lambda),\quad \lambda \in \mathbb{R}\}$.

11. $D(g \circ f)(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$.

HOJA 5

1. La afirmación verdadera es la a).

2. La afirmación verdadera es la c).

3. a) $f(x,y)$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$.
b)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^3}{(\sqrt{3x^2+y^2})^3}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{en } (0,0). \end{cases}$$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ no es continua en $(0,0)$ (no existe límite a lo largo de las curvas $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$).
d) $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$.

4. a) $f(x,y)$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$.
b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ no existe.
c) Como consecuencia de b), $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$.

5. $Dh(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. La afirmación verdadera es la b).

7. La afirmación verdadera es la e).

8. La afirmación verdadera es la d).

9. $D(g \circ f)(1, \frac{\pi}{2}, 2) = \begin{pmatrix} 4 & 4\pi & \pi^2 \\ \pi & 2 & \pi/2 \end{pmatrix}$.

HOJA 6

1. $(3/2, 1)$ es un punto de silla.

2. Los valores máximo y mínimo absolutos de f son $1/4$ y $-1/4$.

3. En ambos casos $(0,0)$ es un punto de silla.

4. La función tiene tres puntos críticos, $(0,0)$ que corresponde a un máximo local, $(2,0)$ que corresponde a un mínimo absoluto y $(-1,0)$ que es un punto de silla.

5. La función tiene dos puntos críticos, $(\frac{-5-\sqrt{10}}{3}, \frac{1-\sqrt{10}}{3})$ que corresponde a un mínimo local y $(\frac{-5+\sqrt{10}}{3}, \frac{1+\sqrt{10}}{3})$ que corresponde a un punto de silla.

6. El máximo absoluto de f es $(10/3)^3$, que se alcanza en $(10/3, 10/3)$, mientras que el mínimo absoluto es 0, y se alcanza en la frontera del dominio.

7. $12x + 2xy + 16x^3$.

8. La afirmación verdadera es la c).

HOJA 7

1. El máximo absoluto es $\sqrt{5}$ y se alcanza en $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0)$, mientras que el mínimo absoluto es $-\sqrt{5} - 4$ que se alcanza en $(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 2)$.

2. Hay cuatro puntos críticos, $(3,0,2)$ que es un mínimo, y $(1,0,2)$, $(-1,0-2)$ y $(-3,0,-2)$ que son puntos de silla.

3. El máximo absoluto de f es 4 que se alcanza en $(-1,0)$ y el mínimo absoluto es $-80/25$ que se alcanza en $(1/5, \sqrt{24}/5)$ y $(1/5, -\sqrt{24}/5)$.

4. La función f tiene cuatro puntos críticos, dos puntos de silla en $(\sqrt{3}/3, 0)$ y $(-\sqrt{3}/3, 0)$, un máximo en $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ y un mínimo en $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

5. La afirmación verdadera es la b).

6. La afirmación verdadera es la b).

7. La afirmación verdadera es la b).

HOJA 8

1. El máximo absoluto de f es 2 que se alcanza en $(\sqrt{2}, 2)$ y en $(-\sqrt{2}, 2)$ mientras que el mínimo absoluto es -66 que se alcanza en $(0, 8)$.

2. 4/3.

3. 9/2.

4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \ y \geq 0\}$ puede expresarse como unión de regiones elementales de tipo I o x-simples:

$$\begin{aligned} D =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -2 \leq x \leq -1, \ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\} \\ & \cup \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq 1, \ \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\} \\ & \cup \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}. \end{aligned}$$

También podemos expresar D como unión de regiones elementales de tipo II o y-simples:

$$\begin{aligned} D =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq 1, \ -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq -\sqrt{1-y^2}\} \\ & \cup \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq y \leq 2, \ -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\} \\ & \cup \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq 1, \ \sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}. \end{aligned}$$

5. 1.

6. 11/6.

7. a) 5/2. b) 1/35.

8. 756 m^3.

9. Basta ver que $1 \leq x^2 + y^2 + 1 \leq 6$ para todo $(x,y) \in D \equiv [-1,1] \times [-1,2]$. De ahí,

$$1 = \frac{\text{Área}(D)}{6} \leq \int\int_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1} \leq \text{Área}(D) = 6.$$

10. 50π.

11. $\pi r^2 h/3$.

HOJA 9

1. 1/8.

2. 1.

3. 52/3.

4. $\dfrac{2^{3/2}-1}{6}$.

5. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{e}{6}-\dfrac{\cos 1}{2}$.

6. $1/2$.

7. $4/5$.

8. $1/7$.

9. 15π.

10. $\pi/8$.

HOJA 10

1. $\dfrac{32\sqrt{2}\pi}{5}$.

2. $\pi(3-e^{-1}+e^{-4})$.

3. $\dfrac{(7+e^{-8})\pi}{2}$.

4. $(2\sqrt{3}-5/3)\pi$.

5. $(2e)^{-1}\pi$.

HOJA 11

1. En ambos casos la integral es igual a 18π.

2. a) En las hipótesis del enunciado, por la definición de integral de línea y la regla de la cadena, se tiene

$$\int_c \nabla f\ ds = \int_a^b \nabla f\big(c(t)\big)\cdot c'(t)\ dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(f\circ c)(t)\ dt = f\big(c(b)\big)-f\big(c(a)\big).$$

b) 0.

3. a) $2\sqrt{2}\pi$. b) 0.

4. $\pi/4$.

5. En ambos casos la integral es igual a 0.

6. a) 1.

b) Sea $c\in\mathcal{C}^1$, cerrada y parametrizada por $c(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$, $t\in[a,b]$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} yzdx+xzdy+xydz &= \int_a^b \big(y(t)z(t),x(t)z(t),x(t)y(t)\big)\cdot\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)\ dt\\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\big(x(t)y(t)z(t)\big)\ dt = x(b)y(b)z(b)-x(a)y(a)z(a)=0.\end{aligned}$$

7. $25/64$. Indicación: Obsérvese que $\vec{F}(x,y,z)=(y^2z^3,2xyz^3+z^2,3xy^2z^2+2yz+1)$ verifica $\vec{F}(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)$ donde $f(x,y,z)=xy^2z^3+z^2y+z$ y podemos aplicar el resultado en el apartado a) del ejercicio 2.

8. La afirmación verdadera es la c).

9. $-\pi$.

10. La afirmación verdadera es la e).