ANÁLISIS MATEMÁTICO II. Curso Primero. Ing. Informática. UAM. Dpto. de Matemáticas. HOJA 3

1. Calcular los siguientes límites, si es que existen:

$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+2} \quad \text{b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x)-1+x^2/2}{x^4+y^4}$$

2. Estudiar si pueden hacerse continuas las siguientes funciones definiéndolas de manera adecuada en el punto $(0,0)$:

$$\text{a)} \frac{\mathrm{sen(x+y)}}{x+y} \quad \text{b)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

3. Se considera la curva $\vec{c}(t) = (\mathrm{sen} t)i + (\cos t)j + (2t^{3/2})k$

- Calcular el vector velocidad de la curva.
- Calcular la ecuación de la recta tangente a la trayectoria en $t = 0$.

4. Sea y definida implícitamente por $x^2 + y^3 + e^y = 0$. Calcular dy/dx en términos de x e y.

5. Calcular el plano tangente a $z = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en el punto $(1, 0, 2)$.

6. Probar que las gráficas de las funciones $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ son tangentes en el punto $(0, 0)$.

7. Calcular la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy^2 + y^2z^3 + z^3x$ en el punto $(4, -2, -1)$ en la dirección $\vec{v} = (i + 3j + 2k)/\sqrt{14}$.

8. Estudiar la continuidad y diferenciabilidad en el punto $(0, 0)$ de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

9. Dada la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

probar que existen $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$. Probar que la función no es continua en $(0, 0)$ y por tanto tampoco es diferenciable en dicho punto.

10. Calcular la longitud de arco de la curva $x(t) = \frac{\cos t}{t}$, $y(t) = \frac{\mathrm{sen}\, t}{t}$, $z(t) = \frac{t}{2}$, entre $t = \pi$ y $t = 2\pi$.

11. Se define la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones es cierta:

(a) f tiene derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$.

(b) f es continua en todo $\mathbb{R}^2$ pero no es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

(c) f no es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

(d) f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ y sus derivadas parciales no son continuas en todo $\mathbb{R}^2$.

12. Calcular el valor de a para que el plano tangente a la superficie $x^2 + \frac{y^2}{a^2} - z^2 = 1$ en el punto $(1, a, 1)$ sea paralelo al plano $x + 2y - z = 0$.

13. Calcular la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = x \cos y^2 + z^2$ en la dirección del vector $\vec{v} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{v}$ en el punto $(1, 0, \sqrt{\pi})$.