

ANÁLISIS MATEMÁTICO II. Curso Primero. Ing. Informática. UAM.
Dpto. de Matemáticas. HOJA 11

1. Demuestre que se verifica el teorema de Green para el campo vectorial

$$\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = (-2y - 3x^2, 3x^2 - 2y^2),$$

y la curva \mathbf{c} definida por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj.

2. Dadas $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva de clase C^1 , $n = 2$ ó 3 .

a) Pruebe que

$$\int_{\mathbf{c}} \nabla f \, ds = f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)).$$

b) Sea \mathbf{c} la curva definida por la circunferencia unidad

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

calcular la integral de línea

$$\int_{\mathbf{c}} y \, dx + x \, dy.$$

3. a) Hallar el área encerrada por la curva $(2 \cos t, \sqrt{2} \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

b) Calcular la integral de línea $\int_{\mathbf{c}} xy \, dx - y^2 \, dy$, siendo \mathbf{c} la elipse $x^2 + 2y^2 = 4$ recorrida en el sentido opuesto al de las agujas del reloj.

4. Hallar el área encerrada por la curva $(\sin t, t \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

5. Considerar la integral de línea

$$\int_{\mathbf{c}} y^3 \, dx + x^3 \, dy,$$

siendo \mathbf{c} la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ recorrida en sentido positivo.

a) Calcular la integral utilizando el teorema de Green.

b) Calcular la integral directamente. Indicación: obsérvese que $(\cos t)^4 - (\sin t)^4 = ((\cos t)^2 + (\sin t)^2)((\cos t)^2 - (\sin t)^2)$.

6. a) Calcular la integral $\int_{\mathbf{c}} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz$, donde $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

b) Probar que la integral $\int_{\mathbf{c}} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz = 0$ siendo \mathbf{c} una curva cerrada cualquiera.

7. Calcular la integral curvilínea

$$\int_{\sigma} y^2 z^3 \, dx + (2xyz^3 + z^2) \, dy + (3xy^2 z^2 + 2yz + 1) \, dz$$

donde $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la curva $\sigma(t) = \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{-t}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^6}\right)$.

8. El área de la porción de superficie de ecuaciones $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$ con $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$ vale:

- (a) $\frac{\pi}{6}\sqrt{5}$.
- (b) $\frac{\pi}{8}(\sqrt{5} - 1)$.
- (c) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$.
- (d) $\frac{\pi}{6}(4\sqrt{5} - 1)$.
- (e) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} + 1)$.

9. Sea el campo $\vec{F} = (2y + e^x, x + \sin(y^2))$ y sea C el círculo $x^2 + y^2 = 1$ recorrido en sentido positivo. Calcular la integral $\int_C \vec{F}$.

10. Dados el campo vectorial $\vec{F} = (x^2, 0, y^2)$ y la curva $\gamma(t) = (\sin t, 0, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, dígame cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- (a) La curva γ y el campo \vec{F} son ortogonales en cada punto.
- (b) \vec{F} es un campo gradiente.
- (c) \vec{F} es tangente a la curva en cada punto.
- (d) $\operatorname{div} \vec{F} = 0$.
- (e) γ tiene tangente en todo punto.