EJERCICIOS DE REPASO — CURSO 2007-08

ANALISIS MATEMÁTICO II

1 (a) ¿Para qué valores de c el ángulo entre los vectores $(1,2,1)$ y $(1,0,c)$ es igual a 60 grados?

(b) Calcula el coseno del ángulo entre una diagonal de un cubo y una diagonal de una de sus caras.

2. Representa gráficamente los conjuntos

a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-2y^2-12y-20\geq 0,\ |x|\leq 4\}$

b) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+2y^2-2x-8\leq 0,\ y<|x|\}$

3 a) Determinar todos los valores posibles del parámetro real λ para que los vectores $\lambda\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ y $\lambda\vec{i}+\vec{j}-\lambda\vec{k}$ (en $\mathbb{R}^3$) sean ortogonales

b) Hallar el ángulo (expresado en radianes) entre los vectores $i-j$ y $j-k$.

——— x ———

4. Definamos la función $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{5xy}{2x^2+3y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) Razonar si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ o no

(b) Decidir si f es continua o no en $(0,0)$ y explicar por qué

5. Considera la función

$$f(x,y)=\frac{x^2-2y^2}{2x^2+3y^4}$$

definida para $(x,y)\neq(0,0)$. ¿Se puede definir $f(0,0)$ de manera que f sea continua en $(0,0)$?

6. Usando la desigualdad $(|x|-|y|)^2\geq 0$, como en clase, demuestra que existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

——— x ———

7. (a) Dadas $g(x,y)=(x^2y, e^x y)$ y $f(u,v)=u^2-v^2$, calcula la derivada de $f\circ g$ en el punto $(1,1)$

(b) Dadas $f(x,y)=xy$ y $c(t)=(e^t,\cos t)$, usa la regla de la cadena para calcular

$$\frac{d(f\circ c(t))}{dt}$$

8 a) Halla la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $xyz=1$ en el punto $P=(1,1,1)$

b) Halla la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $4x^3y-z^2y=3$ en el punto $P=(1,1,1)$

9 a) Halla todas las derivadas parciales segundas de la función $f(x,y)=e^{-2x^2-y^2}$

b) Calcula el polinomio de Taylor de segundo orden para la función $f(x,y)=e^{2x}\cos(y)$ alrededor del punto $P=(0,0)$.

10. Estudia los puntos críticos de las funciones

a) $f(x,y)=xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ b) $g(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$

11 a) Halla tres números positivos cuya suma sea 100 y cuyo producto sea máximo

b) Halla los valores extremos de $f(x,y)=x^2+2y^2$ sobre el disco $x^2+y^2\leq 1$.

12. Definamos la función $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$f(x,y)=(x^2+y^2)^{1/4} \quad ,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

(a) Calcula el gradiente de f en un punto $(x,y)\neq(0,0)$

(b) Decidir si existe o no la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, justificando la respuesta

(c) Decidir razonadamente si f es diferenciable o no en el punto $(0,0)$, indicando el resultado utilizado

(d) ¿En que dirección se registra el crecimiento máximo de la función f en el punto $(0,1)$? Para determinar dicha dirección, elegir un vector $\vec{v}$ de norma 1.

x

13. Sea $c: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ una trayectoria de clase C^1, $c(t) = (x(t), y(t), z(t)) \neq (0,0,0)$ y $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ la función definida mediante la fórmula $h(t) = \|c(t)\|^2$. Calcula $h'(t)$.

14. Hallar razonadamente el valor de $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ donde

$$f(x,y) = \int_0^{x+x^2y} e^{t^2} dt$$

15. Determinar el plano tangente a la superficie $z = x^2 - 4y^2$ en el punto $(2,1,0)$.

16. a) Halla razonadamente todos los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = x^2 - 6xy + y^2 + 4x, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

b) Hallar la matriz Hesiana de f en un punto arbitrario $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

c) Decidir si en los puntos críticos encontrados en el apartado a) la función f tiene un mínimo local, un máximo local o un punto de silla.

x

17. Calcula la longitud de las siguientes trayectorias en $\mathbb{R}^2$

a) $c(t) = t^2 \vec{i} + \frac{2}{3}(2t+1)^{3/2} \vec{j}$, $\quad 0 \leq t \leq 3$

b) $c(t) = (\cos(3t), \operatorname{sen}(3t), 2t^{3/2})$, $\quad 0 \leq t \leq 8$

18. Dibuja el dominio y cambia el orden de integración para calcular

a) $I = \int_0^1 \left(\int_{x^{1/3}}^{1} \sqrt{1-y^4}\, dy \right) dx$

b) $I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_y^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \right) dy$

19. Calcula el área de las siguientes regiones planas

a) La región limitada por las gráficas de las parábolas $y = -x^2+2$, $y=(x-1)^2-3$

b) La región limitada por las gráficas de la parábola $y = x^2-2$ y la recta $y = 2x-1$

20. Calcula $I = \iint_D \frac{y-2x}{y+2x}\, dx\,dy$, donde D es la región plana limitada por las rectas $x=0$, $y=0$, $y+2x=4$ e $y+2x=2$, haciendo un cambio lineal de variables

21. Usa coordenadas polares para hallar el área de la región plana determinada por el círculo $x^2+y^2 \leq 4$ y el semiplano $x \geq 1$

22. Usa coordenadas esféricas para calcular el volumen del sólido determinado por la esfera $x^2+y^2+z^2 \leq 5$ y el semiplano $z \geq 1$.

23. Calcula $I = \iiint_W x^2\, dx\,dy\,dz$, donde W es el sólido limitado por el paraboloide $x^2+y^2=4z$ y el plano $z=1$, usando coordenadas cilíndricas

PARA INTEGRALES SOBRE CURVAS, TEOREMA DE GREEN Y ÁREA DE UNA SUPERFICIE VER LA HOJA 11