

EJERCICIOS DE REPASO  
ANÁLISIS MATEMÁTICO II

CURSO 2007-08

1 (a) ¿Para qué valores de  $c$  el ángulo entre los vectores  $(1, 2, 1)$  y  $(1, 0, c)$  es igual a 60 grados?

(b) Calcula el coseno del ángulo entre una diagonal de un cubo y una diagonal de una de sus caras.

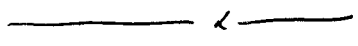
2. Representa gráficamente los conjuntos

a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y^2 - 12y - 20 \geq 0, |x| \leq 4\}$

b)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 - 2x - 8 \geq 0, y < |x|\}$

3. a) Determinar todos los valores posibles del parámetro real  $\lambda$  para que los vectores  $\lambda\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$  y  $\lambda\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$  (en  $\mathbb{R}^3$ ) sean ortogonales

b) Hallar el ángulo (expresado en radianes) entre los vectores  $\vec{i} - \vec{j}$  y  $\vec{j} - \vec{k}$ .



4. Definamos la función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la fórmula

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{5xy}{2x^2 + 3y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Razonar si existe  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  o no

(b) Decidir si  $f$  es continua o no en  $(0, 0)$  y explicar por qué

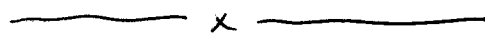
5. Considera la función

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 2y^2}{2x^2 + 3y^4}$$

definida para  $(x, y) \neq (0, 0)$ . ¿Se puede definir  $f(0, 0)$  de manera que  $f$  sea continua en  $(0, 0)$ ?

6. Usando la desigualdad  $(|x|^2 - |y|^2)^2 \geq 0$ , como en clase, demuestra

que existe el límite  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}$



7. (a) Dadas  $g(x,y) = (x^2y, e^xy)$  y  $f(u,v) = u^2 - v^2$ , calcula la derivada de  $f \circ g$  en el punto  $(1,1)$

(b) Dadas  $f(x,y) = xy$  y  $c(t) = (e^t, \cos t)$ , usa la regla de la cadena para calcular

$$\frac{d(f \circ c(t))}{dt}$$

8. a) Halla la ecuación del plano tangente a la superficie definida por  $xyz = 1$  en el punto  $P = (1, 1, 1)$

b) Halla la ecuación del plano tangente a la superficie definida por  $4x^3y - z^2y = 3$  en el punto  $P = (1, 1, 1)$

9. a) Halla todas las derivadas parciales segundas de la función  $f(x,y) = e^{-2x^2 - y^2}$

b) Calcula el polinomio de Taylor de segundo orden para la función  $f(x,y) = e^{2x} \cos(y)$  alrededor del punto  $P = (0, 0)$ .

10. Estudia los puntos críticos de las funciones

a)  $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$       b)  $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

11. a) Halla tres números positivos cuya suma sea 100 y cuyo producto sea máximo

b) Halla los valores extremos de  $f(x,y) = x^2 + 2y^2$  sobre el disco  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

12. Definamos la función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la fórmula

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^{3/4}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

(a) Calcula el gradiente de  $f$  en un punto  $(x,y) \neq (0,0)$

(b) Decidir si existe o no la derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ , justificando la respuesta

- (c) Decidir razonadamente si  $f$  es diferenciable o no en el punto  $(0,0)$ , indicando el resultado utilizado
- (d) ¿En qué dirección se registra el crecimiento máximo de la función  $f$  en el punto  $(0,1)$ ? Para determinar dicha dirección, elegir un vector  $\vec{v}$  de norma 1.

————— x —————

13. Sea  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una trayectoria de clase  $C^1$ ,  $c(t) = (x(t), y(t), z(t)) \neq (0,0,0)$  y  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida mediante la fórmula  $h(t) = \|c(t)\|^2$ . Calcula  $h'(t)$ .

14. Hallar razonadamente el valor de  $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$  donde

$$f(x,y) = \int_0^{x+x^2y} e^{t^2} dt$$

15. Determinar el plano tangente a la superficie  $z = x^2 - 4y^2$  en el punto  $(2,4,0)$ .

16. a) Hallar razonadamente todos los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = x^2 - 6xy + y^2 + 4x, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

b) Hallar la matriz Hessiana de  $f$  en un punto arbitrario  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

c) Decidir si en los puntos críticos encontrados en el apartado a) la función  $f$  tiene un mínimo local, un máximo local o un punto de silla.

————— x —————

17. Calcula la longitud de las siguientes trayectorias en  $\mathbb{R}^2$

a)  $c(t) = t^2 \vec{i} + \frac{2}{3} (2t+1)^{\frac{3}{2}} \vec{j}$ ,  $0 \leq t \leq 3$

b)  $c(t) = (\cos(3t), \sin(3t), 2t)^{\frac{3}{2}}$ ,  $0 \leq t \leq 8$

18. Dibuja el dominio y cambia el orden de integración para calcular

$$a) I = \int_0^1 \left( \int_{x^{1/3}}^1 \sqrt{1-y^4} dy \right) dx$$

$$b) I = \int_0^{\pi/2} \left( \int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \right) dy$$

19. Calcula el área de la siguientes regiones planas

a) La región limitada por los gráficos de las parábolas  $y = -x^2 + 2$ ,  $y = (x-1)^2 - 3$

b) La región limitada por los gráficos de la parábola  $y = x^2 - 2$  y la recta  $y = 2x - 1$

20. Calcula  $I = \iint_D \frac{y-2x}{y+2x} dx dy$ , donde D es la región plana limitada por las rectas  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y+2x=4$  e  $y+2x=2$ , haciendo un cambio lineal de variables

21. Usa coordenadas polares para hallar el área de la región plana determinada por el círculo  $x^2+y^2 \leq 4$  y el semiplano  $x \geq 1$

22. Usa coordenadas esféricas para calcular el volumen del sólido determinado por la esfera  $x^2+y^2+z^2 \leq 5$  y el semiplano  $z \geq 1$ .

23. Calcula  $I = \iiint_W x^2 dx dy dz$ , donde W es el sólido limitado por el paraboloides  $x^2+y^2=4z$  y el plano  $z=1$ , usando coordenadas cilíndricas

PARA INTEGRALES SOBRE CURVAS, TEOREMA DE GREEN Y ÁREA DE UNA SUPERFICIE VER LA HOJA 11