Cálculo II — **1º de Matemáticas**

15 de septiembre de 2008 — Examen Final

Apellidos y Nombre _____

D. N. I. _____

Firma _____

1. Se considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

(a) Demuestra que f no es continua en $(1,0)$.

(b) Prueba que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existen en $(1,0)$.

2. (a) Esbozar el conjunto

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leq 0 \,, \ x^2 + y^2 \leq 1\} \,.$$

(b) Explicar brevemente por qué el conjunto K es compacto y por qué la función f dada por $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$ alcanza en K su máximo y mínimo.

(c) Hallar todos los puntos críticos de f en el interior de K, si los hubiera.

(d) Determinar razonadamente los puntos de mínimo y máximo de f en K y los valores correspondientes.

3. Calcula la integral triple

$$\iiint_W x\, e^{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dx\, dy\, dz \,,$$

donde W es el sólido comprendido entre las superficies esféricas

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

en el primer octante.

4. (a) Determinar la longitud de arco de $\gamma(t) = (\frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2}, t\cos t, t \operatorname{sen} t)$, $1 \leq t \leq 2$.

(b) Calcular la integral $I = \displaystyle\oint_C y^2\, dx + x^2\, dy$, donde C es el triángulo de vértices $(0,0), (0,1)$ y $(1,0)$ orientado en el sentido de las agujas del reloj.