**Cálculo II** | **$1^{\text{o}}$ de Matemáticas**
5 de junio de 2009 | Examen Final

Apellidos y Nombre _____

D. N. I. _____

Firma _____

1. Se considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{5xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Demuestra que $f$ es continua en $(0,0)$.

   (b) Halla las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0.0)$ .

   (c) Determina si $f$ es diferenciable en $(0,0)$.

2. (a) Halla los máximos y mínimos locales y los puntos de silla de la función

$$f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4 \,.$$

   (b) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto $(0,1)$ a la curva de nivel de la función $f$ del apartado anterior que pasa por dicho punto.

3. (a) Halla el valor de

$$I = \int_0^1 \left( \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\, dx \right) dy$$

   invirtiendo el orden de integración.

   (b) Calcula la integral

$$\int\int\int_\Omega (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$$

   siendo $\Omega$ es recinto que está dentro del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y en el interior de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 2z$ .

4. (a) Halla el área de la región acotada $D$ limitada por las curvas

$$y = \sqrt{x^2-4}, \qquad y = -\sqrt{x^2-4}, \qquad y = 2, \qquad y = -2\,.$$

   (b) Calcula

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{s}$$

   para $\overrightarrow{F}(x,y) = y\,\overrightarrow{i} + x^2\,\overrightarrow{j}$ , donde $D$ es la región del apartado (a) y $\partial D$ se recorre en sentido positivo.