Hoja 7

1.- Calcular la integral del campo $\vec{F}(x,y) = (x^2 - y, x + xy + y^2)$ a lo largo de la circunferencia unidad con la orientación positiva, primero empleando la definición de integral de línea y después empleando el teorema de Green.

2.- Calcular el trabajo realizado por el campo

$$\vec{F} = (5\,x^{3/2}\,e^{y^2}, 4\,y\,x^{5/2}\,e^{y^2} + 5\,y^2)$$

a lo largo de la curva descrita en coordenadas polares por la ecuación $r = 2\,\theta^3$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$.

3.- Dados los puntos $A = (2,0), B = (1,-1), C = (1,0)$ y $D = (0,-1)$ de $\mathbb{R}^2$, considérese el camino Γ formado por el arco AB de la circunferencia de centro C y los segmentos orientados BD, DO, OA (O es el origen de coordenadas). Calcular la integral

$$\int_\Gamma (x^4 - x^3 e^x - y)\,dx + (x - y\arctan y)\,dy\,.$$

4.- Hallar la integral de

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

a lo largo de la circunferencia centrada de radio r con la orientación positiva. Hallar también

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

y explicar por qué esto no contradice el Teorema de Green.

5.- Transformar la integral de superficie

$$\int\int_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}\,,$$

en una integral de línea utilizando el Teorema de Stokes y calcular entonces la integral de línea en cada uno de los siguientes casos:

a) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, x\,y, x\,z)$, donde S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* 0.

b) $\vec{F}(x,y,z) = (y,z,x)$, donde S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* $-\pi$.

c) $\vec{F}(x,y,z) = (y - z, y\,z, -x\,z)$, donde S consta de las cinco caras del cubo $0 \leq x,y,z \leq 2$ no situadas en el plano xy y la normal escogida es la exterior. *Resultado:* -4.

6.- Utilizar el Teorema de Stokes para comprobar que las siguientes integrales de línea tienen los valores que se dan, indicando en cada caso el sentido en el que se recorre C para llegar al resultado.

a) Siendo C la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el plano $x + y + z = 0$,

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \pi\,R^2\sqrt{3}\,.$$

b) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2\,y$ y el plano $y = z$,

$$\int_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz = 0\,, \qquad \int_C y^2\,dx + x\,y\,dy + x\,z\,dz = 0\,.$$

c) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el plano $x/a + z/b = 1$, con $a, b > 0$,

$$\int_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz = 2\pi\,a(a+b)\,.$$

7.- Para cada uno de los campos vectoriales que siguen, determinar un potencial, cuando el campo sea un campo conservativo,

a) $\vec{F}(x,y,z) = (x+z, -(y+z), x-y)\,.$

b) $\vec{F}(x,y,z) = (2\,x\,y^3, x^2\,z^3, 3\,x^2\,y\,z^2)\,.$

c) $\vec{F}(x,y,z) = (3\,y^4\,z^2, 4\,x^3\,z^2, -3\,x^2\,y^2)\,.$

d) $\vec{F}(x,y,z) = (4\,x\,y - 3\,x^2\,z^2 + 1, 2\,(x^2+1), -(2\,x^3\,z + 3\,z^2))\,.$

8.- Sea S la superficie formada por las porciones de la semiesfera $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ y del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ con $x^2+y^2 \le 1/2$. Calcular $\int\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ (con la orientación inducida por la normal exterior) donde

$$\vec{F} = (x\,z + e^{y\,\operatorname{sen} z}, 2\,y\,z + \cos xz, -z^2 + e^x \cos y).$$

9.- Hallar la integral del campo

$$\vec{F} = (x + \cos y - \log(1+z^2), y + \operatorname{sen}\sqrt{1+x^2+z^2}, z)$$

sobre la esfera unidad con la orientación inducida por normal exterior.

10.- Hallar la integral de superficie

$$\int\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} \qquad \text{siendo} \qquad \vec{F} = (y-z, z-x, x-y)\,,$$

cuando S es el hemisferio norte de la esfera unidad orientada hacia el exterior. *Resultado:* 0.

11.- Hallar la integral de superficie

$$\int\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} \qquad \text{siendo} \qquad \vec{F} = (x^3, y^3, -a\,b\,z),$$

cuando S es el elipsoide de revolución

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\,,$$

orientado hacia el exterior.

12.- Sea S la superficie del cubo $0 \le x, y, z \le 1$ con la orientación correspondiente a la normal exterior. Si $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$, calcular la integral

$$\int\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

directamente y mediante el teorema de la divergencia.

13.- (*) Demostrar la llamada "fórmula de integración por partes", o "identidad de Green"

$$\int\int\int_V f\Delta g = \int\int_S f\,\nabla g - \int\int\int_V \nabla f\cdot\nabla g$$

para V un dominio acotado de R^3 limitado por S y f, g funciones C^2 arbitrarias. *Indicación:* Demostrar primero $\operatorname{div}(f\,\nabla g) = \nabla f\cdot\nabla g + f\Delta g$. Recuérdese que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \operatorname{div}\nabla\,.$$

14.- (*) Sean C_x, C_y, $C_z \subset \mathbb{R}^3$ circunferencias de radio ε centradas en un mismo punto y paralelas, respectivamente, a los planos coordenados YZ, XZ, XY. Demostrar que en dicho punto se cumple

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\Big(\int_{C_x}\vec{F}\cdot d\vec{s}\,, \int_{C_y}\vec{F}\cdot d\vec{s}\,, \int_{C_z}\vec{F}\cdot d\vec{s}\Big)$$

para cualquier campo $\vec{F} \in C^1$.