Hoja 6

1.- Hallar el vector tangente a la curva $\sigma(t) = (t^2, t^3)$ en el punto $(1, -1)$. Escribir la ecuación de la recta tangente correspondiente. ¿Existe el vector tangente en el punto $(0, 0)$?

2.- Una partícula se mueve en el espacio $\mathbb{R}^3$ por la trayectoria $\sigma(t) = (t\cos t, t\,\mathrm{sen}\, t, t^2)$, donde $t \in [0, 2\pi]$. Determinar su vector velocidad en el punto $(0, \pi/2, \pi^2/4)$ y la recta tangente en dicho punto.

3.- Para las siguientes curvas hallar la velocidad, la rapidez (es decir, el módulo del vector velocidad), la aceleración y la ecuación de la recta tangente en el valor de t dado:

(a) $\sigma_1(t) = \big(e^{-t}\,\mathrm{sen}\, t, e^{-t}\cos t\big), \quad t = 2\pi.$ $\qquad$ (b) $\sigma_2(t) = \big(2t\,\mathrm{sen}(2t), 3t\cos(2t), 5t\big), \quad t = \dfrac{\pi}{2}.$

4.- Una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = \big(t\cos t, t\,\mathrm{sen}\, t, \sqrt{2}\,t^2\big)$ con $t \geq 0$. Cuando $t = 2\pi$, la partícula se sale por la tangente a $\sigma(t)$ y sigue desplazándose en línea recta con velocidad constante. Escribir la trayectoria que define la posición de la partícula para $0 \leq t \leq 4\pi$. ¿Cuál será su posición y su velocidad en $t = 4\pi$? ¿Cuánta distancia habrá recorrido desde el instante inicial hasta ese momento?

5.- Hallar la longitud de la curva en el intervalo indicado:

(a) $\sigma(t) = (t, \sqrt{3}\,t, t^2)$, $0 \leq t \leq 4$.

(b) $\sigma(t) = \big(2t\,\mathrm{sen}(2t), 2t\cos(2t), \sqrt{12}\,t\big)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) $\sigma(t) = \big(e^{-t}\cos t, e^{-t}\,\mathrm{sen}\, t\big)$, $0 \leq t < \infty$.

6.- Calcular la longitud de la curva:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \big(\cos t, \mathrm{sen}\, t, 3t\big) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \pi, \\ \big(-1, -t + \pi, 3t\big) & \text{si} \quad \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

7.- Hallar la ecuación del plano tangente a las superficies parametrizadas:

(a) $\Phi(u, v) = (4u, 3u^2 + v, v^2 + 5)$ en $(0, 1, 6)$.

(b) $\Phi(u, v) = (u^2, e^{v^2}, v^2 + 1)$ en $(0, 1, 1)$.

(c) $\Phi(u, \theta) = (\cosh u\cos\theta, \cosh u\,\mathrm{sen}\,\theta, \mathrm{senh}\, u)$ en $(0, 1, 0)$.

(d) $\Phi(u, v) = (u^2 + 1, v^2 + 1, u^2 + v^2)$ en $\Phi(1, 1)$.

8.- Hallar la expresión de la normal unitaria a las superficies parametrizadas:

(a) $\Phi(u, v) = (\cos u\,\mathrm{sen}\, v, \mathrm{sen}\, u\,\mathrm{sen}\, v, \cos v)$ con $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq \pi$.

(b) $\Phi(\theta, \varphi) = (4\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, 2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, 3\cos\varphi)$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

(c) $\Phi(r, \theta) = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, r)$ con $0 \leq r \leq 5$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

9.- Dada la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 2, hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$ considerándola como:

(a) Superficie parametrizada, $\Phi(\theta, \varphi) = (2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, 2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, 2\cos\varphi)$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

(b) Superficie de nivel 4 de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(c) Gráfica de la función $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ con $(x, y) \in D = \big\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\big\}$.

10.- (a) Hallar un parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$

(b) Hallar una expresión para una normal unitaria a esta superficie.

(c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, 0)$, donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

(d) Demostrar que las rectas $(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0, 5)$ y $(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0, 5)$ están en la superficie y en el plano tangente hallado en (c).

11.- Esbozar los siguientes campos de vectores

(a) $F(x, y) = (-x, y)$.

(b) $F(x, y) = (-y, x)$.

(c) $F(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2} \right)$.

(d) $F(x, y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$.

12.- Mostrar que $\sigma(t) = (t^2 + 1, 2\,t, 3)$ es una línea de flujo del campo $F(x, y, z) = (y - 2\,z + 6, 3\,z - 7, 0)$.

13.- Mostrar que $\sigma(t) = \big(3\,\cos t, 3\,\operatorname{sen} t, 9\,\cos t\,\operatorname{sen} t\big)$ es una línea de flujo del campo $F(x, y, z) = (-y, x, x^2 - y^2)$.

14.- Hallar la divergencia y el rotacional de los campos de vectores:

$$F_1(x, y, z) = (e^{x\,y}, e^{y\,z}, e^{z}), \qquad F_2(x, y, z) = (x\,y^2\,z^2, x^2\,y\,z^2, x^2\,y^2\,z), \qquad F_3(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

15.- Dados $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$, y los campos de vectores en $\mathbb{R}^3$, $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, ambos C^1, mostrar las siguientes identidades:

(a) $\operatorname{rot}(f\,\vec{F}) = f \operatorname{rot} \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$.

(b) $\operatorname{div}(f\,\vec{F}) = f \operatorname{div} \vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}$.

(c) $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$.

16.- Mostrar que $F(x, y, z) = (x^2 + y^2, -2\,x\,y, 0)$ no es un campo gradiente.

17.- Dado $F(x, y, z) = (3\,x^2\,y, x^3 + y^3, 0)$, mostrar que $\nabla \times F = \vec{0}$. Hallar una función f tal que $F = \nabla f$.

18.- Dado $F(x, y, z) = (2\,x + 2\,y, 2\,x + 2\,y\,z^2, 2\,y^2\,z)$, mostrar que $\nabla \times F = \vec{0}$. Hallar una función f tal que $F = \nabla f$.