

Hoja 5

1.- Hallar el valor de las siguientes integrales, determinando y dibujando en cada caso el recinto de integración.

(a) $\int_Q (2x + 3y + z) dx dy dz$ con $Q = [1, 2] \times [-1, 1] \times [0, 1]$.

(b) $\int_T x^2 \cos z dx dy dz$ siendo T la región limitada por los planos $z = 0, z = \pi, y = 0, y = 1, x = 0, x + y = 1$.

(c) $\int_\Omega x y^2 z^3 dx dy dz$ siendo Ω el sólido limitado por la superficie $z = xy$ y los planos $y = x, x = 1$ y $z = 0$.

(d) $\int_\Omega x y \sqrt{z} dx dy dz$ siendo Ω el sólido limitado por la superficie $y = x^2$ y los planos $y = z, y = 1$ y $z = 0$.

2.- En cada uno de los siguientes casos, la integral $\int_\Omega f(x, y, z) dx dy dz$ de la función positiva f se reduce a la integral iterada dada. Dibujar la región de integración $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y su proyección sobre el plano $z = 0$. Escribir entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que integración se hace en el orden $dz dx dy$.

(a) $\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^y f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$ (b) $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$

(c) $\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$ (d) $\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$

3.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular las siguientes integrales. Dibujar el recinto de integración en cada caso.

(a) $\int_B \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2 + 9)^2} dx dy dz$, siendo B la bola de radio 3 centrada en el origen de coordenadas.

(b) $\int_C x y z dx dy dz$ con $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x, y, z \geq 0\}$.

(c) $\int_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, siendo D la corona entre las esferas de radios a y $2a$.

4.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular $\int_\Omega \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es el recinto acotado con frontera $\partial\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = z\}$.

5.- Determinar y dibujar el recinto de integración y hallar el valor de las siguientes integrales, cambiando a coordenadas cilíndricas.

(a) $\int_\Omega (x^2 + y^2) dx dy dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $x^2 + y^2 = 2z$ y el plano $z = 2$.

(b) $\int_\Omega dx dy dz$, siendo Ω la región limitada por los planos coordenados, $z = x^2 + y^2$ y $x + y = 1$.

(c) $\int_\Omega (y^2 + z^2) dx dy dz$ siendo Ω un cono recto de revolución, de altura h , base de radio $a > 0$ situado en el plano $z = 0$ y eje en el eje Z .

(d) $\int_\Omega ((x + y)^2 - z) dx dy dz$, siendo Ω el cono limitado por $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$ y el plano $z = 0$.

6.- Hallar el volumen del sólido de revolución $z^2 \geq x^2 + y^2$ encerrado por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

7.- Calcular el volumen de los siguientes sólidos.

- (a) El limitado superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ e inferiormente por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$.
- (b) El limitado por el plano $z = 0$, el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- (c) El cuerpo acotado $K \subset \mathbb{R}^3$ cuya frontera viene dada por $\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{15}} = 1$.

8.- En los siguientes casos, dibujar el camino σ y hallar la integral $\int_{\sigma} f ds$.

(a) $f(x, y, z) = x + y + z$ y $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

(b) $f(x, y, z) = \frac{x+y}{y+z}$ y $\sigma(t) = \left(t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, t\right)$, $1 \leq t \leq 2$.

(c) $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{y=0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $f(x, y, z) = \frac{1}{y^3}$ y $\sigma(t) = (\log t, t, 2)$, $1 \leq t \leq e$.

9.- Dibujar las siguientes curvas, y hallar su longitud de arco.

(a) El arco de cicloide descrito por

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t), \end{cases}$$

con $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) La cardioide que en coordenadas polares viene dada por $r = 1 + \cos \theta$, con $0 \leq \theta \leq \pi$.