

## Hoja 4

- 1.- Sea  $f(x, y)$  definida para  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$  mediante  $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Demostrar que  $f(x, y)$  no es integrable en el rectángulo  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ .

- 2.- Sea  $f(x, y)$  definida en  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  mediante  $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$

Demostrar la existencia de la integral de  $f$  sobre  $Q$  y que su valor es 0.

- 3.- Hallar el valor de las siguientes integrales sobre los rectángulos indicados. Explicar, en cada caso, la existencia de la integral.

$$(a) \int_Q x^2 e^y dx dy, \quad Q = [-1, 1] \times [0, \log 2]. \quad (b) \int_Q y^{-3} e^{tx/y} dx dy, \quad Q = [0, t] \times [1, t], t > 0.$$

- 4.- Para cada una de las siguientes funciones  $f(x, y)$  definidas sobre el rectángulo  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ , se pide representar el conjunto de los valores de  $f(x, y)$  sobre  $Q$  y calcular el volumen del sólido así definido. Determinar también el conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in Q : f \text{ no es continua en } (x, y)\}$$

y explicar la existencia de las integrales utilizadas.

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} 1 - (x + y) & \text{si } x + y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (b) f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (d) f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } 0 \leq y \leq \sin(\pi x), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- 5.- Dibujar la región de integración, estudiar la existencia de la integral y calcular su valor en cada uno de los casos siguientes.

(a)  $\int_{\Omega} x \cos(x - y) dx dy$ , siendo  $\Omega$  el triángulo de vértices  $(0, 0), (\pi, 0), (\pi, \pi)$ .

(b)  $\int_{\Omega} e^{x+y} dx dy$ , siendo  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ .

(c)  $\int_{\Omega} x^2 y^2 dx dy$ , siendo  $\Omega$  la región acotada del primer cuadrante situada entre las hipérbolas  $xy = 1$ ,  $xy = 2$  y las rectas  $y = x$ ,  $y = 4x$ .

- 6.- Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano  $x + 2y + 3z = 6$ . Dibujar esta pirámide y calcular su volumen.

- 7.- Un sólido está limitado por la superficie  $z = x^2 - y^2$ , el plano  $z = 0$  y los planos  $x = 1$  y  $x = 3$ . Dibujar este sólido y calcular su volumen.

- 8.- En los siguientes apartados, se supone que  $f$  es una función integrable en sobre cada una de las regiones  $\Omega$ . En cada caso, se pide determinar la región  $\Omega$  e invertir el orden de integración:

$$(a) \int_0^2 \left( \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right) dy. \quad (b) \int_1^4 \left( \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy \right) dx.$$

$$(c) \int_1^e \left( \int_0^{\log x} f(x, y) dy \right) dx. \quad (d) \int_0^{\pi} \left( \int_{-\sin x/2}^{\sin x} f(x, y) dy \right) dx.$$

9.- Hallar el valor de la integral

$$\int_{\Omega} e^{(y-x)/(y+x)} dx dy,$$

donde  $\Omega$  es el triángulo determinado por la recta  $x + y = 2$  y los dos ejes coordenados. Utilícese un cambio lineal de variables.

10.- En cada uno de los siguientes casos, dibujar la región  $\Omega$  y expresar la integral  $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$  como una integral iterada en coordenadas polares.

(a)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}, a > 0.$

(b)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}.$

(c)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}.$

(d)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}.$

11.- Consideramos la aplicación definida por  $\begin{cases} x = u + v, \\ y = v - u^2. \end{cases}$

(a) Calcular su Jacobiano  $J(u, v)$ .

(b) Calcular la imagen  $\Omega$  mediante esta transformación del triángulo  $T$  de vértices  $(0, 0), (2, 0), (0, 2)$ .

(c) Calcular  $\int_{\Omega} \frac{1}{(x - y + 1)^2} dx dy.$

12.- Se considera la aplicación definida por  $\begin{cases} x = u^2 - v^2, \\ y = 2uv. \end{cases}$

(a) Calcular su Jacobiano  $J(u, v)$ .

(b) Calcular la imagen  $\Omega$  mediante esta transformación del rectángulo  $R$  de vértices  $(1, 1), (2, 1), (2, 3), (1, 3)$ .

(c) Calcular el área de  $\Omega$