Hoja 2

1.- Hallar todas las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones escalares.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen} xy$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2},}$ definida en los $(x,y) \neq (0,0)$.

(c) $f(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$, definida para los $x\,y \neq 1$.

2.- Considérese la función definida en los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2+y^4} \qquad \text{si } x \neq 0, \qquad\qquad f(0,y) = 0.$$

(a) Demostrar que las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existen y calcular su valor.

(b) ¿Es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

(c) ¿Es $f(x,y)$ diferenciable en $(0,0)$?

(d) Hallar la derivada direccional $D_{(u,v)}f(0,0)$ para cada dirección $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

3.- Demuéstrese que la función $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ es continua en todo el plano y tiene derivadas parciales en $(0,0)$, pero no es diferenciable en el origen.

4.- Demuéstrese que la función definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0, \end{cases}$$

tiene derivadas parciales continuas en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$ que no son continuas en el punto $(0,0)$ y que, sin embargo, $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

5.- Considérese la función

$$f(x,y) = (x^2+y^4)^2 \operatorname{máx}\{|3x+y|, |x-y|\}\,.$$

(a) Calcular las derivadas parciales y estudiar si f es diferenciable en $(0,0)$.

(b) Demostrar que f es diferenciable en el punto $(3,-2)$ y calcular su diferencial en ese punto.

(c) ¿Existen las derivadas parciales de $f(x,y)$ en el punto $(-1,1)$?

6.- Hallar el vector gradiente, en cada punto en el que exista, de las siguientes funciones escalares

(a) $f(x,y) = e^x \cos y$.

(b) $f(x,y,z) = \log(x^2 + 2\,y^2 - 3\,z^2)$.

(c) $f(x,y) = xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

7.- Hallar los puntos (x,y) y las direcciones $\mathbf{v} = (u,v)$ unitarias en los cuales la derivada direccional $D_{\mathbf{v}}f(x,y)$ de la función $f(x,y) = 3\,x^2 + y^2$ tiene un máximo, sabiendo que (x,y) está en la circunferencia $x^2+y^2 = 1$.

8.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en el punto $a \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que $D_{\mathbf{u}}f(a) = 1$ y $D_{\mathbf{v}}f(a) = 2$ siendo $\mathbf{u} = (2,3)$ y $\mathbf{v} = (1,1)$. Representar gráficamente las direcciones $\mathbf{w}$ para las cuales $D_{\mathbf{w}}f(a) = 6$. Calcular el gradiente $\nabla f(a)$.

9.- Hallar la matriz de $Df(a)$ en cada uno de los siguientes casos:

(*a*) $f(x,y) = (y, x, xy, y^2 - x^2)$, $a = (1,2)$.

(*b*) $f(x,y) = (\operatorname{sen}(x+y), \cos(x-y))$, $a = (\pi, -\pi/4)$.

(*c*) $f(x,y,z) = z^2\, e^x \cos y$, $a = (0, \pi/2, -1)$.

(*d*) $f(x) = (e^x \operatorname{sen} x, e^x \cos x, x^2)$, $a = \pi/6$.

(*e*) $f(x,y,z,t) = (\sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{x^2+z^2}, x^2+y^2+z^2-9\,t^2)$, $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right)$.

10.- Hallar la ecuación de los planos tangentes a la gráficas de la funciones:

(*a*) $f(x,y) = x^2 - y^2$, en el punto $(1,1,0)$.

(*b*) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en un punto genérico (x_0, y_0, z_0). ¿En qué puntos es el plano tangente paralelo al plano $x = z$?

11.- Sea $f(x,y) = F(u(x,y), v(x,y))$ con $u = \dfrac{x-y}{2}, v = \dfrac{x+y}{2}$. Aplicar la regla de la cadena para calcular $\nabla F(x,y)$ en función de las derivadas parciales de f, $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

12.- Las relaciones $u = f(x,y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ definen u como función escalar de t, digamos $u = u(t)$. Aplicar la regla de la cadena para la derivada de u respecto de t cuando

$$f(x,y) = e^{x\,y} \cos x\,y^2, \qquad x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t.$$

13.- La sustitución $t = g(x,y)$ convierte $F(t)$ en $f(x,y) = F(g(x,y))$. Calcular la matriz de $Df(x,y)$ en el caso particular en que $F(t) = e^{\operatorname{sen} t}$ y $g(x,y) = \cos(x^2+y^2)$.

14.- Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ funciones vectoriales definidas mediante

$$f(x,y) = (e^{x+2y}, \operatorname{sen}(2x+y)), \qquad g(u,v,w) = (u + 2v^2 + 3v^3, 2v - u^2).$$

Hallar cada una de las matrices de $Df(x,y)$ y $Dg(u,v,w)$. Calcular la función compuesta $h(u,v,w) = f(g(u,v,w))$. Calcular la matriz de $Dh(1,-1,1)$.

15.- Sean f una función diferenciable en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $g = (g_1, g_2)$ la función vectorial

$$g(u,v,w) = (u^2 + v^2 + w^2, u + v + w).$$

Considérese la función compuesta $h = f \circ g$ y demuéstrese que

$$\|\nabla h\|^2 = 4\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 g_1 + 4\,\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\, g_2 + 3\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

16.- Hallar la función derivada $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, siendo $f(x,y) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2}\, dt$, definida para $x > 0, y > 0$.

17.- Considérese la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(*a*) ¿Es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

(*b*) Hallar las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.

(*c*) Sea $g(t) = (t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Hallar la función compuesta $f \circ g$ y la derivada $(f \circ g)'(0)$. ¿Se puede calcular esta derivada utilizando la regla de la cadena?

18.- Supongamos que la ecuación $y^2 + xz + z^2 - e^z - k = 0$ define z como función de x e y, sea ésta $z = f(x,y)$. Hallar el valor de la constante k para el cual $f(0,e) = 2$ y calcular $\nabla f(0,e)$.

19.- Consideremos el lugar geométrico de los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para los cuales $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$. ¿Existe un plano tangente en el origen? ¿Por qué?

20.- Si (a, b, c) es un punto de la superficie $z = x\,y$, las dos rectas

$$\begin{cases} z = b\,x, \\ y = b, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} z = a\,y, \\ x = a, \end{cases}$$

se cortan en (a, b, c) y están situadas en la superficie. Comprobar que el plano tangente a esta superficie en el punto (a, b, c) contiene a esas dos rectas.

21.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva determinada por la intersección de las dos superficies $x^2 + y^2 + 2\,z^2 = 4$ y $z = e^{x-y}$ en el punto $(1, 1, 1)$.

22.- Hallar una constante c tal que en todo punto de la intersección de las dos esferas $(x - c)^2 + y^2 + z^2 = 3$ y $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$ los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares el uno a otro.