

Hoja 1

1.- Hallar todos los valores de a y b para los que los vectores $x = (4, b, 1)$ e $y = (a, b, 0)$ de \mathbb{R}^3 , son ortogonales. ¿Cuál es el lugar geométrico del plano determinado por tales a y b ?

2.- Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$(a) 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2, \text{ (ley del paralelogramo).}$$

$$(b) \|x - y\| \cdot \|x + y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

$$(c) x \cdot y = 0 \text{ si y sólo si } \|x + y\| = \|x - y\|.$$

$$(d) x \cdot y = 0 \text{ si y sólo si } \|x + \lambda y\| \geq \|x\| \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$(e) \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

Interpretar dichos resultados geoméricamente en términos del paralelogramo formado por los vectores x e y .

3.- Hallar, si existe, el límite de la sucesión $\{x_k\}_k$ en \mathbb{R}^2 cuando

$$x_k = \left(\frac{\log k}{k}, k^{1/k} \right).$$

$$x_k = \left((-1)^k, \frac{1}{k} \right).$$

$$x_k = \left(\cos \frac{k\pi}{2}, \frac{1}{k} \sin \left(k^2 + \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

$$x_k = \left(\sqrt{k^2 + 2} - k, \frac{1}{k^k} \right).$$

4.- Hallar, si existe, el límite de la sucesión $\{x_k\}_k$ en \mathbb{R}^2 cuando

$$x_k = \left(a_k, \frac{1}{a_k - 2} \right)$$

y la sucesión $\{a_k\}_k$ de números reales está definida mediante

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad 7a_{k+1} = a_k^3 + 6, \quad \text{para cada } k \geq 1.$$

(Indicación: demostrar que $\{a_k\}_k$ es creciente y que cada $a_k < 1$.)

5.- Sea

$$B = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\}.$$

Demostrar que B no es cerrado. (Indicación: utilizar la caracterización de cerrados por medio de sucesiones).

6.- Dibujar las curvas de nivel y la gráfica de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(a) f(x, y) = x - y + 2$$

$$(b) f(x, y) = x^2 + 4y^2$$

$$(c) f(x, y) = -xy$$

$$(d) f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$$

$$(e) f(x, y) = 1 + (x^2 + y^2)$$

$$(f) f(x, y) = x^3 - x$$

$$(g) f(x, y) = \frac{x}{1 + y^2}$$

$$(h) f(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$$

$$(i) f(x, y) = \sin^2(x^2 + y^2)$$

7.- Dibujar las superficies de nivel de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(a) f(x, y, z) = x - y - z + 2.$$

$$(b) f(x, y, z) = x^2 + y^2.$$

$$(c) f(x, y, z) = y(x + z).$$

$$(d) f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

$$(e) f(x, y, z) = \cos((x^2 + y^2) - z).$$

$$(f) f(x, y, z) = x - y.$$

$$(g) f(x, y, z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$(h) f(x, y, z) = -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z.$$

8.- Dibujar las superficies determinadas por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 (a) z = 1 - x^2 - y^2. & (b) z = x^2 - y^2. \\
 (c) z = x^2 + y^2 + 1. & (d) 4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16. \\
 (e) x^2 + z^2 = 4. & (f) z^2 = 1 + x^2 + y^2. \\
 (g) z^2 = x^2 + y^2. & (h) z^2 = x^2 + y^2 - 1.
 \end{array}$$

9.- Hallar los límites

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 \operatorname{sen} y^2 + y^4 e^{-|x|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{\max\{|x|, |y|\}}{\sqrt{x^4 + y^4}}.$$

10.- En cada una de las funciones que siguen, se pide determinar los conjuntos de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donde están definidas y donde son continuas.

$$\begin{array}{lll}
 (i) f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2. & (j) f(x, y) = \tan \frac{x^2}{y}. & (k) f(x, y) = \frac{1}{\log(x^2 + y^2)}. \\
 (l) f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}. & (m) f(x, y) = \frac{\cos x^2}{y}. & (n) f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.
 \end{array}$$

11.- Sea

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

definida para los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x + y \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = -1.$$

¿Existe el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$?

12.- Sea $f(x, y)$ definida mediante

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

en los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2 y^2 + (x - y)^2 \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$$

y que no existe el $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

13.- Demostrar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} y \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x \operatorname{sen} \frac{1}{y} & \text{si } x, y \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tiene límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ y que, sin embargo, no existen los límites iterados

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right).$$

14.- Para cada $(x, y) \neq (0, 0)$ se define

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Hallar el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ a lo largo de la rectas $y = \lambda x$. ¿Es posible definir $f(0, 0)$ de modo que f sea continua en $(0, 0)$?

15.- ¿Se pueden hacer continuas las funciones

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

definiéndolas de forma adecuada en $(0, 0)$?

16.- Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \text{ ó } y \geq x^2, \\ 1 & \text{si } 0 < y < x^2. \end{cases}$$

Demostrar que $f(x, y) \rightarrow 0$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen. Hallar una curva que pase por el origen a lo largo de la cual (salvo en el origen) $f(x, y)$ tiene el valor constante 1. ¿Es f continua en el origen?

17.- Estudiar si son abiertos o cerrados los siguientes conjuntos, utilizando razonamientos con funciones continuas.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 36\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 + \cos^2(x + y)\},$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^6 + 2y^2 + z^4 < 5\},$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1, \exp((x^2 + y^2) - 5) < 1\},$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y^2)^4 > 1\}.$$