Universidad Autónoma de Madrid

Análisis Matemático II **1^{O} de Físicas**

15 DE JUNIO DE 2009 EXAMEN FINAL

APELLIDOS Y NOMBRE ______________________________

D. N. I. ______________ GRUPO ______________

FIRMA ______________________________

1. Se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+3xy^3}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Hallar $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

   (b) Hallar $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

   (c) Hallar $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$,

2. Sea $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$.

   (a) Encontrar todos los puntos críticos de f.

   (b) Determinar la naturaleza del punto crítico (0,0).

   (c) Hallar el máximo y el mínimo absoluto de f en el disco unidad $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.

3. (a) Dibujar el recinto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 3,\ xy \geq 2,\ x \geq y\}$.

   (b) Sea $T(u,v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$. Hallar U tal que $T(U) = D$ y calcular el jacobiano de T.

   (c) Calcular la integral

$$I = \int\int_D (x^2-y^2)e^{(x+y)^2}\,dx\,dy$$

   usando el cambio de variables $u = x+y, v = x-y$.

4. Sea $F(x,y,z) = (3xy^2, 3x^2y, z^3)$.

   a) Comprobar que rot $\overrightarrow{F} = 0$ y hallar f tal que $\overrightarrow{F} = \text{grad } f$.

   b) Sea S la esfera $\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ orientada según la normal exterior. Calcular

$$\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}.$$

TIEMPO: 3 HORAS