ONDÍCULAS Y TRATAMIENTO DE SEÑALES —– CURSO 2007-08

TEMAS PARA EL EXAMEN

1. La transformada de Fourier discreta y la transformada de Fourier rápida.

a) Demuestra qeue la familia de vectores N-dimensionales

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \, e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \right)_{n=0}^{N-1} : 0 \leq k < N \right\}$$

es una base ortonormal de $\mathbb{C}^N$.

b) Define la transformada de Fourier discreta de una señal discreta $(f[n])_{n=0}^{N-1}$ y establece la fórmula de inversión.

c) Describe el algoritmo de la transformada rápida de Fourier.

2. Bases ortonormales discretas.

a) (DC-I) Demuestra que la colección de vectores

$$\left\{ \lambda_k \sqrt{\frac{2}{N}} \left(cos \frac{k\pi}{n} (n + \frac{1}{2}) \right)_{n=0}^{N-1} \right\}_{k=0}^{N-1}$$

con $\lambda_0 = 1/\sqrt{2}$ y $\lambda_k = 1$ si $1 \leq k \leq N-1$ es una base ortonormal de $\mathbb{C}^N$.

b) Indica el procedimiento para obtener DC-IV.

3. El formato JPG 80.

a) Describe el modelo matemático de una imagen y su sistema de representación en color.

b) Describe como se aplica al DCT-I a una señal bidimensional de tamaño $2^q \times 2^q$.

c) Describe la codificación del formato JPG89, poniendo un ejemplo razonable de un bloque de 8×8.

4. La entropía de Shannon.

a) Define la entropía, $H(X)$, de una fuente de información X.

b) Demuestra que para toda fuente de información X con K símbolos, se tiene $0 \leq H(X) \leq \log_2 K$.

c) Describe el algoritmo de Kraft para hallar un código binario con la condición del prefijo, de manera que

$$R(X) \leq H(X) + 1$$

donde $R(X)$ es la media de bits usados para codificar los símbolos de X.

5. El código de Huffman.

a) Describe como se codifican los símbolos de un fuente de información $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_L\}$ de acuerdo con sus probabilidades $\{p_1, p_2, \ldots, p_L\}$, según el código de Huffman.

b) Demuestra que el código de Huffman es óptimo, en el sentido de que minimiza $R(X)$.

c) Construye un código de Huffman de los símobolos $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\}$ con probabilidades $p_1 = 0,01, p_2 = 0,05, p_3 = 0,06, p_4 = 0,08, p_5 = 0,15, p_6 = 0,15, p_7 = 0,5$.

6. Análisis Multirresolución en $L^2(\mathbb{R})$.

a) Definición de AMR en $L^2(\mathbb{R})$.

b) Demuestra que si $g \in L^2(\mathbb{R})$, $\{g(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ si y solo si $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{|g}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$ casi todo $\omega \in \mathbb{R}$.

c) Define el filtro $h(\omega)$ asociado a un AMR y demuestra que $h(\omega)|^2 + |h(\omega + \pi)|^2 = 1$ casi todo $\omega \in \mathbb{R}$.

7. Diseño de ondículas en $L^2(\mathbb{R})$.

a) Describe la receta de S. Mallat para construir ondículas ortonormales a partir de una AMR con función de escala φ.

b) Construye las ondículas de Haar y de Shannon a partir de sus corrrespondientes AMR.

c) Diseña la ondícula de Daubechies de soporte compacto con dos momentos nulos. En particular calcula los coeficientes de su filtro $h(\omega)$.

8. Descomposición y reconstrucción con óndiculas ortonormales.

a) Sean $c_j[k] =< f, \varphi_{j,k} >$ y $d_j[k] =< f, \psi_{j,k} >$, $f \in L^2(\mathbb{R}), j, k \in \mathbb{Z}$. Demuestra que

$$c_{j-1}[p] = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{h[k-2p]}\, c_j[k] \quad p \in \mathbb{Z}\,,$$

y

$$d_{j-1}[p] = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{g[k-2p]}\, c_j[k] \quad p \in \mathbb{Z}\,.$$

b) Deduce la fórmulas de descomposición para la tendencia y los detalles

$$c_{j-1}[p] = \sqrt{2} c_j * \tilde{h}[2p]\,, \qquad d_{j-1}[p] = \sqrt{2} c_j * \tilde{g}[2p].$$

c) Prueba la fórmula de reconstrucción

$$c_j[p] = \sqrt{2}\check{c}_{j-1,k} * h[p] + \sqrt{2}\check{d}_{j-1,k} * g[p]\,.$$

9. Bases de ondículas periódicas en $L^2([0,1])$.

Explica como se obtienen las ondículas periódicas en $L^2([0,1])$ a partir de un AMR de $L^2(\mathbb{R})$ con función de escala φ y ondícula ψ de soporte compacto.