TEMA 6 - EJERCICIOS 2007/08

1. Consideremos un par de AMR con funciones de escala φ y $\tilde{\varphi}$. Supongamos que φ y $\tilde{\varphi}$ forman una base de Riesz del V_0 correspondiente. Probar que son equivalentes

   i) Los AMR son biortogonales (esto es, $\langle \varphi(\cdot-n), \tilde{\varphi}(\cdot-k)\rangle = \delta_{n,k}$)

   ii) $\sum_n \hat{\varphi}(\omega+2n\pi)\,\hat{\tilde{\varphi}}(\omega+2n\pi) = 1$ c.t. $\omega \in \mathbb{R}$

2. Sean h y $\tilde{h}$ dos filtros asociados a dos AMR biortogonales con funciones de escala φ y $\tilde{\varphi}$. Usando que $\hat{\varphi}(2\omega) = h(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$ y $\hat{\tilde{\varphi}}(2\omega) = \tilde{h}(\omega)\hat{\tilde{\varphi}}(\omega)$, demuestra que

$$\overline{h(\omega)}\,\tilde{h}(\omega) + \overline{h(\omega+\pi)}\,\tilde{h}(\omega+\pi) = 1 \quad \text{c.t. } \omega \in \mathbb{R}$$

(Sugerencia: usar el ejercicio 1)

3. Sea h un filtro finito que satisface $h(-\omega) = e^{i\omega} h(\omega)$. Demuestra que $h(\omega)$ puede escribirse de la forma $h(\omega) = e^{-i\omega/2}(\cos\frac{\omega}{2})\, P(\cos\omega)$, donde P es un polinomio.

4. Sea h un filtro finito de la forma $h(-\omega) = e^{i\omega\varepsilon} h(\omega)$ con $\varepsilon = 0$ ó 1. Sea $\tilde{h}$ otro filtro finito tal que

$$\overline{h(\omega)}\,\tilde{h}(\omega) + \overline{h(\omega+\pi)}\,\tilde{h}(\omega+\pi) = 1 \qquad (*)$$

Demuestra que

$$\tilde{h}^*(\omega) = \frac{1}{2}\left[\tilde{h}(\omega) + e^{-i\varepsilon\omega}\tilde{h}(-\omega)\right]$$

verifica $(*)$ (con $\tilde{h}^*$ en lugar de $\tilde{h}$) y satisface $\tilde{h}^*(-\omega) = e^{i\omega\varepsilon}\tilde{h}^*(\omega)$.

5. Sean h y $\tilde{h}$ filtros finitos asociados a dos AMR biortogonales con funciones de escala φ y $\tilde{\varphi}$. Demostrar

   (a) Si $h(\omega)$ y $\tilde{h}(\omega)$ son simétricos respecto a 0, entonces φ y $\tilde{\varphi}$ son simétricos respecto a cero y $\psi, \tilde{\psi}$ son simétricos respecto a $1/2$

b) Si $h(\omega)$ y $\tilde{h}(\omega)$ son simétricos respecto a $\frac{1}{2}$ (es decir $h(-\omega) = e^{i\omega/2} h(\omega)$ y $\tilde{h}(-\omega) = e^{i\omega/2} \tilde{h}(\omega)$)

entonces, $\varphi, \tilde{\varphi}$ son simétricos respecto a $\frac{1}{2}$ y $\psi, \tilde{\psi}$ son antisimétricos respecto a $1/2$

6. Calcular los coeficientes de $h(\omega)$ y $\tilde{h}(\omega)$ para $\tilde{p}=1, p=2, \epsilon=0$ de onditelas spline biortogonales

7. La colección $\{e_j : j \in J\}$ es un marco en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ si existen constantes A, B, $0 < A \leq B < \infty$, tal que

$$A \|f\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq B \|f\|_{\mathbb{H}}^2$$

Demuestra que la colección $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $e_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ es un marco para $\mathbb{C}^2$ con $A = B = 3/2$.