

Los seis primeros ejercicios se refieren a las onduladas spline. Quizá tengas que mirar el capítulo 4 de [HW]

1. Cuando $\varphi = 1_{[0,1]}$, $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$. Usa la fórmula $1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2$ demostrada en clase para probar

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\omega + 2k\pi)^2} = \frac{1}{4\pi^2 \frac{\omega}{2}} \quad (1)$$

2. Para $N = 1, 2, 3, 4, \dots$ sea

$$P_N\left(\frac{\omega}{2}\right) = \left(2 \sin \frac{\omega}{2}\right)^{N+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\omega + 2k\pi)^{N+1}}.$$

Derivando (1) calcula $P_2(\omega)$, $P_3(\omega)$ y $P_4(\omega)$ y dibuja sus gráficas.

Para $n = 1, 2, 3, \dots$ la ondulada spline φ^n está dada por

$$\hat{\varphi}^n(\omega) = e^{i\varepsilon \frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{\omega}{2}} \frac{\left(\sin \frac{\omega}{4}\right)^{2n+2}}{(\omega/4)^{n+1}} \sqrt{\frac{P_{2n+1}\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\pi}{2}\right)}{P_{2n+1}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot P_{2n+1}\left(\frac{\omega}{4}\right)}} \quad (2)$$

donde $\varepsilon = 0$ si n es impar y $\varepsilon = 1$ si n es par.

3. Demuestra que cuando n es impar, φ^n es par respecto a $t = -\frac{1}{2}$, mientras que cuando n es par, φ^n es impar respecto a $t = -\frac{1}{2}$.

4. Usa la fórmula (2) para demostrar que φ^n tiene los $n+1$ primeros momentos nulos, es decir

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \varphi^n(t) dt = 0 \quad \text{si } k = 0, 1, \dots, n$$

5. Demuestra que la onda de spline de orden 1, η^1 , tiene decaimiento exponencial (esto es, $\exists c > 0$ y $\alpha > 0$ tal que $|\eta(t)| \leq c e^{-\alpha|t|}$, $t \in \mathbb{R}$)

6. Intenta dibujar (con tu programa de dibujar gráficos favorito) η^1 , $|\hat{\eta}^1|$, ψ^1 , $\hat{\psi}^1$ y h^1 (todo para la onda de spline de orden 1).

_____ x _____

7. Halla los coeficientes del filtro de la onda de Daubechies con dos momentos nulos, es decir la que proviene de $g_1(u)$ con $k=1$.

_____ x _____