

TEMA 5 - EJERCICIOS

2007/08

Los seis primeros ejercicios se refieren a las ondículas spline. Quizá tengas que mirar el capítulo 4 de [HW].

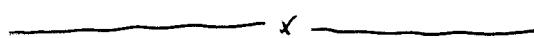
1. Cuando $\varphi = 1_{[0,1]} \Rightarrow \{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistemaortonormal en $L^2(\mathbb{R})$. Usa la fórmula $1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2kr)|^2$ demostrada en clase para probar

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(w + 2kr)^2} = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{w}{2}} \quad (1)$$

2. Para $N = 1, 2, 3, 4, \dots$ sea

$$P_N\left(\frac{w}{2}\right) = \left(2 \sin \frac{w}{2}\right)^{N+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(w + 2kr)^{N+1}}.$$

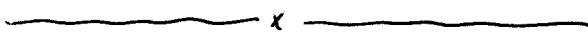
Desarrollando (1) calcula $P_2(w)$, $P_3(w)$ y $P_4(w)$ y dibuja sus gráficas.



Para $n = 1, 2, 3, \dots$ la ondícula spline $\hat{\varphi}^n$ está dada por

$$\hat{\varphi}^n(w) = e^{i\varepsilon \frac{w}{2}} e^{-i\frac{w}{2}} \frac{\left(\sin \frac{w}{4}\right)^{2n+2}}{(w/4)^{n+1}} \sqrt{\frac{P_{2n+1}\left(\frac{w}{4} + \frac{\pi}{2}\right)}{P_{2n+1}\left(\frac{w}{2}\right) \cdot P_{2n+1}\left(\frac{w}{4}\right)}} \quad (2)$$

donde $\varepsilon = 0$ si n es impar y $\varepsilon = 1$ si n es par.



3. Demuestra que cuando n es impar, $\hat{\varphi}^n$ es par respecto a $t = \frac{1}{2}$, mientras que cuando n es par, $\hat{\varphi}^n$ es impar respecto a $t = \frac{1}{2}$.

4. Usa la fórmula (2) para demostrar que $\hat{\varphi}^n$ tiene los $n+1$ primeros momentos nulos, es decir

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \hat{\varphi}^n(t) dt = 0 \text{ si } k = 0, 1, \dots, n$$

5. Demuestra que la ondícula spline de orden 1, $\hat{\psi}^1$, tiene decaimiento exponencial (esto es, $\exists C > 0$ y $\alpha > 0$ tal que $|\hat{\psi}(t)| \leq Ce^{-\alpha|t|}$, $t \in \mathbb{R}$)

6. Intenta dibujar (con tu programa de dibujar gráficos favorito) $\hat{\psi}^1$, $|\hat{\psi}^1|$, $\hat{\psi}^1$, $\hat{\psi}^1$ y \hat{h}^1 (todo para la ondícula spline de orden 1).

_____ x _____

7. Halla los coeficientes del filtro de la ondícula de Daubechies con dos momentos nulos, es decir la que proviene de $g_1(w)$ con $k=1$.

_____ x _____