EJERCICIOS TEMA 4

1. Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible tal que

   a) $\{E + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$

   b) $\{2^j E : j \in \mathbb{Z}\}$ es una partición de $\mathbb{R} - \{0\}$

i) Demuestra que $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\omega} : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de E (Sugerencia: como $\{E+2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$, existen $k_\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{Z}$ y una partición $\{E_\ell : \ell \in \mathbb{Z}\}$ de E tal que $\{E_\ell + 2k_\ell\pi : \ell \in \mathbb{Z}\}$ es una partición de $[0, 2\pi)$)

ii) Sea ψ definida por $\hat{\psi} = 1_E$. Demuestra que ψ es una ondícula ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ (Sugerencia: imita la demostración que hicimos para la ondícula de Shannon).

4.2. i) (Journé) Sea $E_J = [-\frac{32}{7}\pi, -4\pi) \cup [-\pi, -\frac{4}{7}\pi) \cup [\frac{4}{7}\pi, \pi) \cup [4\pi, \frac{32}{7}\pi)$. Demuestra que ψ_J dada por $\hat{\psi}_J = 1_{E_J}$ es una ondícula ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$.

ii) (Lemarié) Sea $E_L = [-\frac{8}{7}\pi, -\frac{4}{7}\pi) \cup [\frac{4}{7}\pi, \frac{6}{7}\pi) \cup [\frac{24}{7}\pi, \frac{32}{7}\pi)$. Demuestra que ψ_L dada por $\hat{\psi}_L = 1_{E_L}$ es una ondícula ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$

(Sugerencia: Utiliza el ejercicio 4.1)

4.3 i) Demuestra que en un AMR se tiene $|\hat{\varphi}(\omega)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j\omega)|$, $\omega \in \mathbb{R}$

(Sugerencia: calcula $|\hat{\varphi}(2\omega)|^2 + |\hat{\psi}(2\omega)|^2$)

ii) Utiliza la fórmula del apartado i) para calcular $|\hat{\varphi}_J|$ cuando ψ_J es la ondícula de Journé descrita en 4.2 i)

iii) Comprueba que ψ_J no puede provenir de un AMR porque si lo fuera $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}_J(\omega + 2k\pi)|^2 \geq 2$ cuando $\omega \in (0, \frac{2\pi}{7})$.

4.4. Calcula los coeficientes $\{h[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ del filtro para la ondícula de Shannon que se obtiene a partir de la función de escala $\hat{\varphi} = 1_{[-\pi, \pi]}$.

4.5 a) Para p entero positivo, $p>1$, escribe la definición de Análisis Multiresolución con factor de dilatación p.

b) Demuestra que para un AMR con factor de dilatación p existe una función $h(\omega)$, 2π-periódica y en $L^2([0,2\pi))$, tal que $\hat{\varphi}(\omega) = h\left(\frac{\omega}{p}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{p}\right)$. ($h$ se llama filtro de paso bajo).

4.6. Para un AMR con factor de dilatación $p\in\mathbb{Z}$, $p>1$, prueba que se cumple la siguiente igualdad

$$\sum_{s=0}^{p-1} \left|h\left(\omega+\frac{2\pi s}{p}\right)\right|^2 = 1 \qquad \text{c.t. } \omega\in\mathbb{R}$$

donde h es el filtro de paso bajo de 4.5 b)

— x —