EJERCICIOS TEMA 3

3.1. Halla un código binario que cumpla la condición del prefijo y cuyas palabras tengan longitudes $l_1 = 2$, $l_2 = 3$, $l_3 = 3$, $l_4 = 4$, $l_5 = 4$ y $l_6 = 6$.

3.2 Sean $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ siete símbolos cuyas probabilidades son 0'55, 0'25, 0'14, 0'04, 0'01, 0'01 respectivamente

(a) Calcula la entropía $\mathcal{H}(X)$. Construye un código de Huffman binario $\mathcal{C}$ y calcula $R_X(\mathcal{C})$

(b) Supongamos que los símbolos se codifican con códigos que toman 3 valores 0, 1 y 2. Códigos de longitud variable pueden representarse en este caso con árboles ternarios. Extiende el algoritmo de Huffman para hallar un código ternario con la propiedad del prefijo para este sistema y calcula la longitud media de las palabras codificadas.

3.3. Considera los símbolos $X = \{x_1, \dots, x_L\}$ que aparecen con probabilidades $\{p_1, \dots, p_L\}$. Agrupa los símbolos en bloques de longitud n para formar una nueva fuente de información $X_n = \{S_1, S_2, \dots, S_{L^n}\}$ de L^n símbolos, donde $S_k = x_{i_1} \dots x_{i_n}$ y $P(S_k) = \prod_{j=1}^{n} p(x_{i_j})$

(a) Demuestra que $\mathcal{H}(X_n) = n\,\mathcal{H}(X)$, donde $\mathcal{H}$ es la entropía de Shannon

(b) Sea $\mathcal{C}_n$ un código con la propiedad del prefijo para X_n y sea $R_X(\mathcal{C}_n) = \frac{R_{X_n}(\mathcal{C}_n)}{n}$ la longitud media de cada símbolo codificado con $\mathcal{C}_n$. Demuestra que existe un código $\mathcal{C}_n$ tal que

$$\mathcal{H}(X) \leq R_X(\mathcal{C}_n) \leq \mathcal{H}(X) + \frac{1}{n}$$

3.4. Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad $p(x)$. Sea Q un cuantizador cuyos intervalos de cuantización son $\{(y_{k-1}, y_k]\}_{k=1,\dots,L}$. Prueba que $D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_k)^2 p(x)\,dx$ alcanza su valor mínimo cuando

$$Q(x) = x_k \equiv \frac{\int_{y_{k-1}}^{y_k} x\,p(x)\,dx}{\int_{y_{k-1}}^{y_k} p(x)\,dx}$$

3.5. Una vez aplicada la DCT-I y cuantizados, los coeficientes de un bloque de 8×8 de una imagen son

$$\begin{matrix} -26 & -3 & -6 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Supongamos que $DC^i - DC^{i-1} = -4$. Halla la representación simbólica de estos coeficientes en el orden zig-zag. Halla su representación binaria poniendo un código de Huffman para los símbolos $S_1 = (L, T)$ de este bloque.

———— x ————