EJERCICIOS - TEMA 2

1. Dada $f: [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$, extenderla a $\tilde{f}$ en $\mathbb{R}$ de manera que sea periódica de periodo 2 e impar respecto al origen. Hallar una base (ortonormal) de $L^2[0,1]$ con senos.

2. Sea $(f[n])_{n=0}^{N-1}$ una señal de tamaño N. Extender a una señal $(\tilde{f}[n])_{n=-N}^{N-1}$ tal que sea antisimétrica con respecto a $-1/2$. Utiliza $\tilde{f}$ y un razonamiento similar al de la base de cosenos I para hallar una base (ortonormal) discreta de senos.

3. a) Reagrupa los términos $f[n]$ y $f[N-1-n]$ con $0 \leq n \leq \frac{N}{2}-1$, $N = 2^q$ en la DCT-I para expresar $\hat{f}_I[2k]$ como la DCT-I de la señal $s[n] = f[n] + f[N-1-n]$, $0 \leq n \leq \frac{N}{2}-1$.

   b) De manera similar, expresa $f_I[2k+1]$ como la DCT-IV de la señal $r[n] = f[n] - f[N-1-n]$, $0 \leq n \leq \frac{N}{2}-1$

4. Sea $f = [8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64]$. Calcula la transformada DCT-I de f redondeando al entero más cercano. Sea $\tilde{f}$ la señal obtenida poniendo a 0 los valores de las cuatro últimas frecuencias. Calcula la inversa IDCT-I de $\tilde{f}$ y observa que sale muy similar a f.

5. Sea $N_j^{(2)}$ el número de bases ortonormales en un árbol cuaternario de profundidad j. Demuestra que

$$2^{4^{j-1}} \leq N_j^{(2)} \leq e^{\frac{49}{48}\cdot 4^{j-1}}$$
