EJERCICIOS

Ondículas y tratamiento de señales.

1. Muestreo de Señales e Imágenes.

1 –. Si $f(t) = e^{-t^2}$, $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2/4}$

2 –. El gorgeo Gaussiano (Chip) $f(t) = e^{-(a-ib)t^2}$

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a-ib}} \cdot \exp\left(\frac{-(a+ib)\omega^2}{4(a^2+b^2)}\right)$$

3 –. $f \circledast h[n] = \sum_{p=0}^{N-1} h[p]\, f[n-p]$

4 –. Comprobar que $\|f\|_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{f}[k]|^2$.

5 –. Si f, h son señales de tamaño N y $g = f \circledast h$, demostrar que $\hat{g}[k] = \hat{f}[k] \cdot \hat{h}[k]$, $0 \leq k < N-1$.

6 –. Supongamos que $\mathrm{sop}\, \hat{f} \subset \left[-(n+1)\frac{\pi}{T}, -n\frac{\pi}{T}\right] \cup \left[n\frac{\pi}{T}, (n+1)\frac{\pi}{T}\right]$ y que $f(t)$ es real. Halla una fórmula para recuperar f a partir de sus muestras $\{f(nT)\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Lista de ejercicios

tema 2

1. Dada $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, extenderla a $\tilde{f}$ en $\mathbb{R}$ que sea periódica de periodo 2 e impar respecto al origen. Encontrar una base de $L^2[0,1]$ con senos.

2. Dada $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, extenderla a $\tilde{f}$ en $\mathbb{R}$, que sea de periodo 4, impar respecto al origen y simétrica respecto a -1 y 1. Encontrar así otra base de senos con frecuencias impares.

3. Sea $f = [8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64]$.

~~a)~~ Calcula la transformación DCT-I de f redondeando al entero más cercano. Sea $\tilde{f}$ la señal obtenida poniendo a 0 los cuatro valores de las frecuencias altas. Calcula la inversa IDCT-I de $\tilde{f}$ y maravillate de que sale "casi" f.

4. Sea $(f[n])_{n=0}^{N-1}$ una señal de tamaño N. Extender a una señal $(\tilde{f}[n])_{n=-N}^{N-1}$ tal que sea antisimétrica con respecto a $-1/2$. Utiliza $\tilde{f}$ y un razonamiento similar al de la base de cosenos I para hallar una base discreta de senos.

5. a) Reagrupa los términos $f[n]$ y $f[N-1-n]$ con $0 \leq n \leq \frac{N}{2}-1$, $N = 2^{2}$, en la DCT-I para expresar $\hat{f}_I[2k]$ como la DCT-I de la señal $s[n] = f[n] + f[N-1-n]$, $0 \leq n \leq \frac{N}{2}-1$;

b) De manera similar, expresa $f_I[2k+1]$ como DCT-IV de la señal $r[n] = f[n] - f[N-1-n]$, $0 \leq n \leq \frac{N}{2}-1$.

6. Hartley transform. Sea $\cos(t) = \cos t + \sin t$. Definir:

$$\mathcal{B} = \left\{ (g_k[n])_{n=0}^{N-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \cos\left(\frac{2\pi n k}{N} \right) \right)_{n=0}^{N-1} \right\}_{k=0}^{N-1}$$

a) Probar que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de $\mathbb{C}^N$;

b) Para una señal $(f[n])_{n=0}^{N-1}$ de tamaño N, halla un algoritmo rápido para calcular la transformada de Hartley, basado en la FFT, que calcule $(\langle f, g_k \rangle)_{k=0}^{N-1}$ con $O(N \log_2 N)$ operaciones ($N = 2^\ell$).

EJERCICIOS TEMA 3

3.1. Siguiendo el algoritmo desarrollado en la demostración de la desigualdad de Kraft, halla un código binario que cumpla la condición del prefijo y cuyas palabras tengan longitudes $l_1 = 2$, $l_2 = 2$, $l_3 = 3$, $l_4 = 3$, $l_5 = 4$ y $l_6 = 4$.

3.2. Sean $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ siete símbolos cuyas probabilidades son 0'49, 0'26, 0'12, 0'04, 0'04, 0'03 y 0'02 respectivamente.

(a) Calcula la entropía $\mathcal{H}(X)$. Construye un código de Huffman binario $\mathcal{C}$ y calcula $R_X(\mathcal{C})$

(b) Supongamos que los símbolos se codifican con códigos que toman tres valores 0, 1 y 2. Códigos de longitud variable pueden representarse en este caso con árboles ternarios. Extiende el algoritmo de Huffman para hallar un código ternario con la propiedad del prefijo para este sistema y calcula la longitud media de las palabras codificadas.

3.3. Considera los símbolos $X = \{x_1, \ldots, x_L\}$ que aparecen con probabilidades $\{p_1, \ldots, p_L\}$. Agrupa los símbolos en bloques de longitud n para formar una nueva fuente de información $X_n = \{s_1, \ldots, s_{L^n}\}$ de L^n símbolos, donde $s_k = x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ y $p(s_k) = \prod_{j=1}^{n} p(x_{i_j})$

(a) Demuestra que $\mathcal{H}(X_n) = n\mathcal{H}(X)$, donde $\mathcal{H}$ es la entropía de Shannon

(b) Sea $\mathcal{C}_n$ un código con la ~~longitud~~ propiedad del prefijo para X_n y sea $R_X(\mathcal{C}_n) = \dfrac{R_{X_n}(\mathcal{C}_n)}{n}$ la longitud media de cada símbolo codificado con $\mathcal{C}_n$. Demuestra que $\mathcal{H}(X) \leq R_X(\mathcal{C}_n) \leq \mathcal{H}(X) + \frac{1}{n}$.

3.4. Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad $p(x)$. Sea Q un cuantizador cuyos intervalos de cuantización son $\{(y_{k-1}, y_k]\}_{k=1,\ldots,L}$. Prueba que $D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_k)^2 p(x)dx$ es mínimo si

$$Q(x) = x_k = \frac{\int_{y_{k-1}}^{y_k} x\, p(x)dx}{\int_{y_{k-1}}^{y_k} p(x)dx}$$

3.5. Una vez aplicada la DCT-I y cuantizados, los coeficientes de un bloque de 8x8 de una imagen son

$$
\begin{matrix}
-26 & -3 & -6 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -2 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & 1 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-4 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}
$$

Supongamos que $DC^{i} - DC^{i-1} = -4$. Halla la representación simbólica en el orden zig-zag de estos coeficientes. Halla su representación binaria poniendo un código de Huffman para los símbolos $S_1 = (L, T)$ de este bloque.

EJERCICIOS TEMA 4

1. Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible tal que

   a) $\{E + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$

   b) $\{2^j E : j \in \mathbb{Z}\}$ es una partición de $\mathbb{R} - \{0\}$

i) Demuestra que $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\omega} : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de E (Sugerencia: como $\{E + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$, existen $k_\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{Z}$ y una partición $\{E_\ell : \ell \in \mathbb{Z}\}$ de E tal que $\{E_\ell + 2k_\ell\pi : \ell \in \mathbb{Z}\}$ es una partición de $[0, 2\pi)$)

ii) Sea ψ definida por $\hat{\psi} = 1_E$. Demuestra que ψ es una ondícula ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ (Sugerencia: imita la demostración que hicimos para la ondícula de Shannon).

4.2. i) (Journé) Sea $E_J = [-\frac{32}{7}\pi, -4\pi) \cup [-\pi, -\frac{4}{7}\pi) \cup [\frac{4}{7}\pi, \pi) \cup [4\pi, \frac{32}{7}\pi)$. Demuestra que ψ_J dada por $\hat{\psi}_J = 1_{E_J}$ es una ondícula ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$.

ii) (Lemarié) Sea $E_L = [-\frac{8}{7}\pi, -\frac{4}{7}\pi) \cup [\frac{4}{7}\pi, \frac{6}{7}\pi) \cup [\frac{24}{7}\pi, \frac{32}{7}\pi)$. Demuestra que ψ_L dada por $\hat{\psi}_L = 1_{E_L}$ es una ondícula ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$

(Sugerencia: Utiliza el ejercicio 4.1)

4.3 i) Demuestra que en un AMR se tiene $|\hat{\varphi}(\omega)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j\omega)|$, $\omega \in \mathbb{R}$ (Sugerencia: calcula $|\hat{\varphi}(2\omega)|^2 + |\hat{\psi}(2\omega)|^2$)

ii) Utiliza la fórmula del apartado i) para calcular $|\hat{\varphi}_J|$ cuando ψ_J es la ondícula de Journé descrita en 4.2 i)

iii) Comprueba que ψ_J no puede provenir de un AMR porque si lo fuera $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}_J(\omega + 2k\pi)|^2 \geq 2$ cuando $\omega \in (0, \frac{2\pi}{7})$.

4.4. Calcula los coeficientes $\{h[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ del filtro para la ondícula de Shannon que se obtiene a partir de la función de escala $\hat{\varphi} = 1_{[-\pi,\pi]}$.

4.5 Este es un ejercicio con varios apartados sobre las ondículas spline. Quizá tengas que mirar el capítulo 4 de [HW].

i) Cuando $\varphi = 1_{[0,1]}$, $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$. Usa la fórmula $1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2$ demostrada en clase para probar

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\omega+2k\pi)^2} = \frac{1}{4\sin^2\frac{\omega}{2}} \qquad (1)$$

ii) Para $N = 1, 2, 3, 4, \dots$ sea

$$P_N\left(\frac{\omega}{2}\right) = \left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{N+1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\omega+2k\pi)^{N+1}}.$$

Derivando (1), calcula $P_2(\omega)$, $P_3(\omega)$ y $P_4(\omega)$ y dibuja sus gráficas.

Para $n = 1, 2, 3, \dots$ la ondícula spline ψ^n está dada por

$$\hat{\psi}^n(\omega) = e^{i\varepsilon\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{\omega}{2}} \frac{(\sin\omega/4)^{2n+2}}{(\omega/4)^{n+1}} \cdot \sqrt{\frac{P_{2n+1}\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}{P_{2n+1}\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot P_{2n+1}(\omega/4)}} \qquad (2)$$

donde $\varepsilon = 0$ si n es impar y $\varepsilon = 1$ si n es par.

iii) Demuestra que cuando n es impar, ψ^n es par respecto a $t = \frac{1}{2}$, mientras que cuando n es par, ψ^n es impar respecto a $t = \frac{1}{2}$, esto es

$$\psi^n(t) = \begin{cases} \psi^n(1-t) & \text{si } n \text{ es impar} \\ -\psi^n(1-t) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

iv) Usa la fórmula (2) para demostrar que ψ^n tiene los $n+1$ primeros momentos nulos, es decir $\int_{\mathbb{R}} t^k \psi^k(t)\,dt = 0$ si $k = 0, 1, 2, \dots, n$

v) Demuestra que la ondícula spline de orden 1, ψ^1, tiene decaimiento exponencial (esto es, $\exists\, C > 0$ y $\alpha > 0$ tal que $|g(t)| \leq Ce^{-\alpha|t|}$, $t \in \mathbb{R}$). Demuestra también que $\{h^1[k]\}_{k\in\mathbb{Z}}$ (los coeficientes del filtro de ψ^1) tienen decaimiento exponencial en $|k|$.

vi) Intenta dibujar (con tu programa de dibujar gráficas favorito) ψ^1, $|\hat{\psi}^1|$, φ^1, $\hat{\varphi}^1$ y h^1 (todo para la ondícula spline de orden 1)

EJERCICIOS ONDÍCULAS

TEMA 5

1_ Consideremos un par de AMR con funciones de escala φ y $\tilde{\varphi}$. Supongamos que φ y $\tilde{\varphi}$ forman bases de Riesz del V_0 correspondiente. Probar que son equivalentes:

(i) Los AMR son biortogonales (i.e., $\langle \varphi(\cdot - m), \tilde{\varphi}(\cdot - k) \rangle = \delta_{m,k}, \forall m,k \in \mathbb{Z}$)

(ii) $\sum_m \overline{\hat{\varphi}(\omega + 2m\pi)} \, \hat{\tilde{\varphi}}(\omega + 2m\pi) = 1$.

2_ Sean h y $\tilde{h}$ los filtros asociados a dos AMR biortogonales con funciones de escala φ y $\tilde{\varphi}$. Usando que

$$\hat{\varphi}(2\omega) = h(\omega)\, \hat{\varphi}(\omega)$$

y

$$\hat{\tilde{\varphi}}(2\omega) = \tilde{h}(\omega)\, \hat{\tilde{\varphi}}(\omega)$$

probar que

$$\overline{h(\omega)}\, \tilde{h}(\omega) + \overline{h(\omega+\pi)}\, \tilde{h}(\omega+\pi) = 1.$$

(Hint: Usar el ejercicio 1 y el truco $\sum_n = \sum_{n \text{ par}} + \sum_{n \text{ impar}}$).

3_ Recordemos que si h es un filtro finito entonces

$$(*) \qquad h(-\omega) = e^{i\omega\varepsilon}\, h(\omega) \qquad \text{con} \quad \varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } h \text{ es sim. resp. } 0 \\ 1 & \text{si } h \text{ es sim. resp. } \tfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Probar que para el caso $\varepsilon = 1$, $h(\omega)$ se puede escribir de la forma

$$h(\omega) = e^{i\omega/2}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right) \cdot P(\cos\omega)$$

donde P es un polinomio.

4_ Sea h un filtro finito de la forma $(*)$. Sea $\tilde{h}$ otro filtro finito tal que

$$(**) \qquad \overline{h(\omega)}\, \tilde{h}(\omega) + \overline{h(\omega+\pi)}\, \tilde{h}(\omega+\pi) = 1.$$

Demostrar que

$$\tilde{h}^*(\omega) = \frac{1}{2}\left[\tilde{h}(\omega) + e^{-i\varepsilon\omega}\,\tilde{h}(-\omega)\right]$$

verifica (**) (con $\tilde{h}^*$ en lugar de $\tilde{h}$) y satisface (*)

5. Sean h y $\tilde{h}$ filtros finitos asociados a dos AMR biortogonales con funciones de escala φ y $\tilde{\varphi}$.

Demostrar:

(i) $h(\omega), \tilde{h}(\omega)$ simétricos respecto a $0 \Longrightarrow \varphi, \tilde{\varphi}$ simétricos respecto a 0 y $\psi, \tilde{\psi}$ simétricos respecto a $\frac{1}{2}$.

(ii) $h(\omega), \tilde{h}(\omega)$ simétricos respecto a $\frac{1}{2} \Longrightarrow \varphi, \tilde{\varphi}$ simétricos respecto a 0 y $\psi, \tilde{\psi}$ antisimétricos respecto a $\frac{1}{2}$.

6. Calcular los coeficientes de $h(\omega)$ y $\tilde{h}(\omega)$ para $\tilde{p}=1$, $p=2$, $\varepsilon=0$ para ondículas spline biortogonales.