UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

VARIABLE REAL — CIENCIAS MATEMÁTICAS

Curso 2005-06 — 7 de febrero de 2006

Apellidos ....

Nombre .... DNI ....

Ejercicio 1. (**5 puntos**) Desarrollar **uno** de los siguientes temas:

A. El teorema de diferenciación de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

1. Enunciar el teorema de diferenciación de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y dar una demostración para funciones continuas.
2. Definir el operador maximal de Hardy-Littlewood M y demostrar que no es acotado de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$.
3. Demostrar el teorema de diferenciación de Lebesgue en $\mathbb{R}$ a partir de la acotación débil del operador maximal de Hardy-Littlewood.

B. La transformada de Fourier de funciones de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

1. Definir la transformada de Fourier de una función de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Enunciar y demostrar el lema de Riemann-Lebesgue para $n = 1$.
2. Propiedades de la transformada de Fourier: comportamiento con respecto a la convolución, la traslación, la modulación, la dilatacion y la derivación. Incluir al menos tres demostraciones.

Ejercicio 2. (**1 punto**)

1. Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in \bigcap_{p<r<\infty} L^r \setminus L^p$.
2. Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in \bigcap_{0<r<p} L^r \setminus L^p$.

Ejercicio 3. (**2 puntos**) Sea f la función definida en $[-\pi, \pi)$ mediante $f(x) = |x|$.

1. Demostrar que $\widehat{f}(0) = \frac{\pi}{2}$ y $\widehat{f}(n) = \frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2}$ si $n \neq 0$. Cuál es la serie de Fourier de f en términos de senos y cosenos ?
2. Utilizar el apartado anterior para demostrar que

$$i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \qquad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Ejercicio 4. (**2 puntos**) **Núcleos de sumabilidad con parámetro continuo** en $L^1(\mathbb{T})$. Dado el intervalo $J = (a, b)$ (finito o no), se dice que la colección de funciones 1-periódicas $\{K_r\}_{r\in J} \subset L^1(\mathbb{T})$ es un NUCLEO DE SUMABILIDAD para $r \to a^+$ si se cumplen:

i) Existe $C < \infty$ tal que $\int_{-1/2}^{1/2} |K_r(t)|dt \leq C$, $\forall r \in J$.

ii) $\int_{-1/2}^{1/2} K_r(t)\, dt = 1$, $\forall r \in J$.

iii) Para todo $0 < \delta < 1/2$, $\lim_{r\to a^+} \int_{\delta<|t|<1/2} |K_r(t)|dt = 0$.

Probar que si $\{K_r\}_{r\in J}$ es un núcleo de sumabilidad para $r \to a^+$ entonces

a) $K_r * f \to f$ uniformemente cuando $r \to a^+$, $\forall f$ 1-periódica y continua.

b) $K_r * f \to f$ en norma L^p cuando $r \to a^+$, $\forall f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$.

Eugenio Hernández

DURACIÓN: 3 HORAS