UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

VARIABLE REAL — CIENCIAS MATEMÁTICAS

Curso 2005-06 — 12 de septiembre de 2006

Apellidos...

Nombre.......................................DNI.......................................

Ejercicio 1. (**5 puntos**) Desarrollar **uno** de los siguientes temas:

A. Aproximación de funciones mediante convoluciones.

Sea $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx = 1$, $\phi \geq 0$, y definir $\phi_t(x) = \frac{1}{t^n}\phi(\frac{x}{t})$.

1. Demostrar que si f es acotada y uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$, $f * \phi_t \to f$ uniformemente cuando $t \to 0^+$.
2. Demostrar que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, $f * \phi_t \to f$ en la norma de $L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $t \to 0^+$.

B. Series de Fourier

1. Definición de serie de Fourier de una función. Las sumas parciales de la serie de Fourier y el núcleo de Dirichlet.
2. Sumabilidad Cesàro de series de Fourier: el núcleo de Fejér.

Ejercicio 2. (**1 punto**)

1. Sea $g(x) = 1$ si $0 \leq x < 1/2$ y $g(x) = 0$ si $1/2 \leq x < 1$. Calcular los coeficientes de Fourier de g como función periódica de periodo 1.
2. Sea $h = \chi_{[0,1/2)}$ definida en $\mathbb{R}$. Calcular y dibujar $h * h$.

Ejercicio 3. (**2 puntos**)

1. Hallar una base ortonormal de los polinomios de grado 1 en $L^2([0,\infty])$ con el producto escalar dado por $< f, g >= \int_0^\infty f(x)g(x)\,e^{-x}\,dx$.
2. Calcular min $\{\int_0^\infty |x^3 - a - bx|^2\,e^{-x}\,dx \ : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio 4. (**2 puntos**)

1. Comprobar que $G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\,e^{-\|x\|^2/4t}$, $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$, satisface la ecuación $\frac{\partial G_t(x)}{\partial t} = \Delta_x G_t(x)$, donde $\Delta_x u(x,t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ es el Laplaciano de u.
2. Usar la transformada de Fourier para demostrar que la solución de la ecuación $\frac{\partial u(x,t))}{\partial t} = \Delta_x u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$, puede escribirse de la forma

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{R^n} f(y)\,e^{-\|x-y\|^2/4t}\,dy\,.$$

Eugenio Hernández

DURACIÓN: 3 HORAS