1. Los espacios $L^p(X,\mu)$; las desigualdades de Höilder y Minkowski

a) Definir los espacios $L^p(X,\mu)$, $1\leq p<\infty$, como clases de equivalencia y probar que son espacios vectoriales

b) Enunciar y probar la desigualdad de Höilder.

c) Probar que $L^p(X,\mu)$, $1\leq p<\infty$, es un espacio normado.

---

2. Relaciones entre los espacios $L^p(X,\mu)$.

a) Demostrar que si $\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{p}+\frac{\theta}{r}$ con $0<\theta<1$ se tiene $\|f\|_q \leq \|f\|_p^{1-\theta}\|f\|_r^{\theta}$.

b) Probar que si $1\leq p<q<r\leq\infty$ se cumple $L^p(X,\mu)\cap L^r(X,\mu)\subset L^q(X,\mu)\subset L^p(X,\mu)+L^r(X,\mu)$.

c) Si $\mu(X)<\infty$ y $1\leq p<q<\infty$, demostrar que $L^q(X,\mu)\subset L^p(X,\mu)$ y que la inclusión es estricta.

---

3. Aproximación en $L^p(X,\mu)$ con funciones sencillas.

a) Demostrar que las funciones simples son densas en $L^p(X,\mu)$, $1\leq p<\infty$.

b) Dados $V$ abierto y $K$ compacto, con $K\subset V\subset\mathbb{R}$, demostrar que existe $g\in C_c(\mathbb{R})$ tal que $\chi_K(x)\leq g(x)\leq\chi_V(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

c) Dados $a<b$ y $\varepsilon>0$, demostrar que existe $g\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\chi_{[a,b]}(x)\leq g(x)\leq\chi_{[a-\varepsilon,b+\varepsilon]}(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

---

4. Convolución de dos funciones definidas en $\mathbb{R}^n$.

a) Definir la convolución de dos funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ y enunciar sus propiedades elementales

b) Enunciar y demostrar la desigualdad de Young para la convolución de dos funciones.

---

5. Aproximación de funciones mediante convoluciones.

Sea $\phi\in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx=1$, $\phi\geq 0$, y definir $\phi_t(x)=\frac{1}{t^n}\phi(\frac{x}{t})$.

a) Demostrar que si $f$ es acotada y uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$, $f*\phi_t\to f$ uniformemente cuando $t\to 0^+$

b) Demostrar que si $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\leq p<\infty$, $f*\phi_t\to f$ en la norma de $L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $t\to 0^+$.

---

6. El teorema de diferenciación de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

a) Enunciar el teorema de diferenciación de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y dar una demostración para funciones continuas.

b) Definir el operador maximal de Hardy-Littlewood $M$ y mostrar que no es acotado de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$.

c) Demostrar el teorema de diferenciación de Lebesgue a partir de la acotación débil del operador maximal de Hardy-Littlewood.

---

7. Producto escalar y espacios de Hilbert.

a) Definir el concepto de producto escalar en un espacio vectorial complejo $\mathbb{H}$. Enunciar y demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

b) Definir el concepto de espacio de Hilbert

c) Enunciar y demostrar la propiedad de mínima distancia del origen a un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Hilbert.

---

8. Bases en un espacio de Hilbert

a) Definición de sistema ortonormal en un espacio de Hilbert y ejemplos.

b) Enunciar y demostrar la desigualdad de Bessel para un sistema ortonormal numerable en un espacio de Hilbert.

c) Definición de base en un espacio de Hilbert y definiciones equivalentes.

---

9. Series de Fourier.

a) Definición de serie de Fourier. Las sumas parciales de la serie de Fourier y el núcleo de Dirichlet.

b) Sumabilidad Cesàro de series de Fourier: el núcleo de Fejér.

---

10. Sumabilidad Abel de series de Fourier.

a) Definición de familia de núcleos de sumabilidad $\{K_r(\theta)\}_{r\in[0,1)}$, $\theta \in \mathbb{T} = [-\pi,\pi]$, cuando $r \to 1^-$.

b) Las medias de Abel de la serie de Fourier y el núcleo de Poisson $\{P_r(\theta)\}_{r\in[0,1)}$.

c) Demostrar que $\{P_r(\theta)\}_{r\in[0,1)}$ es una familia de núcleos de sumabilidad.

---

11. Criterios de convergencia puntual para series de Fourier.

a) Enunciar y demostrar el criterio de Dini.

b) Enunciar y demostrar un resultado de convergencia para la serie de Fourier en un punto de discontinuidad de una función.

---

12. La transformada de Fourier de funciones de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

a) Definición de transformada de Fourier de una función de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Enunciar y demostrar el lema de Riemann-Lebesgue para $n=1$.

b) Propiedades de la transformada de Fourier: comportamiento con respecto a la convolución, la traslación, la modulación, la dilatación y la derivación. Incluir al menos tres demostraciones.

---

13. La transformada de Fourier y la clase de Schwartz.

a) Escribir la fórmula de inversión de la transformada de Fourier con las hipótesis adecuadas.

b) Definir la clase de Schwartz en $\mathbb{R}^n$ y demostrar que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

c) Escribir y demostrar los teoremas de Plancherel y Parseval para la transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

---

14. Resultados con la transformada de Fourier.

a) Enunciar la fórmula de sumación de Poisson y demostrarla

b) Enunciar el principio de incertidumbre y el teorema del muestreo de Shannon.

c) Demostrar uno de los dos teoremas enunciados en el apartado b).

---

15. Resolución de EDP's con la transformada de Fourier.

a) Escribir la ecuación del calor en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ y describir cómo llegar a la solución $u(x,t) = f * G_t(x)$, donde $G_t$ es el núcleo de Gauss, usando la transformada de Fourier.

b) Escribir la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ y describir cómo llegar a la solución $u(x,t) = f * P_t(x)$, donde $P_t$ es el núcleo de Poisson, usando la transformada de Fourier en el caso $\underline{n=1}$

---