HOJA 7 DE PROBLEMAS

1. Para una función $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se define la traslación por $y\in\mathbb{R}^n$ como $(T_y f)(x)=f(x-y)$, la modulación por $z\in\mathbb{R}^n$ como $(M_z f)(x)=e^{2\pi i x\cdot z}f(x)$ y la dilatación por una matriz de orden n no singular A como $(D_A f(x)=f(Ax)$. Demostrar

$$a)\widehat{(T_y f)}(\xi)=(M_{-y}\widehat{f}\,)(\xi)\quad b)\widehat{(M_z f)}(\xi)=(T_z\widehat{f}\,)(\xi)\quad c)\widehat{(D_A f)}(\xi)=\frac{1}{|detA|}(D_{(A^{-1})^t}\widehat{f}\,)(\xi)$$

2. *a*) Sea $f(x)$ tal que $\widehat{f}\,(\xi)=\pi e^{-2\pi|\xi|}$, $\xi,x\in\mathbb{R}$; demostrar que $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.
   b) Si $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, demostrar que $f\star f\star f(x)=3\pi^2\frac{1}{9+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
   c) Si $g(x)=e^{10\pi i x}\frac{1}{9+x^2}$, demostar que $\widehat{f}\,(\xi)=\frac{\pi}{3}e^{-6\pi|\xi-5|}$, $x,\xi\in\mathbb{R}$.

3. Sean $f(x)=\chi_{[-1/2,1/2]}(x)$ y $g(x)=(1-|x|)\chi_{[-1,1]}$. Demostrar que

$$\widehat{f}\,(\xi)=\frac{\operatorname{sen}\pi\xi}{\pi\xi}\qquad \text{y}\qquad \widehat{g}\,(\xi)=\left(\frac{\operatorname{sen}\pi\xi}{\pi\xi}\right)^2.$$

4. El siguiente ejercicio ilustra el principio de que el decaimiento de $\widehat{f}$ está relacionado con la suavidad de f. Supongamos uqe $f\in L^1(\mathbb{R})$ y que $|\widehat{f}\,(\xi)|\le C/|\xi|^{1+\alpha}$ cuando $|\xi|\to\infty$ para algún $\alpha\in(0,1)$. Demostrar que f satisface la condición de Hölder de orden α, es decir $|f(x+h)-f(x)|\le M|h|^\alpha$ para algún $M>0$ y para todo $x,h\in\mathbb{R}$. (Indicación: con la fórmula de inversión de la transformada de Fourier expresar $f(x+h)-f(x)$ como una integral que contiene a $\widehat{f}$ y estimar esta integral separadamente en los conjuntos $|\xi|\le\frac{1}{|h|}$ y $|\xi|>\frac{1}{|h|}$.)

5. Sean f y g tales que $|f(x)|\,,|g(x)|\le C/(1+\|x\|)^{n+\alpha}$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\alpha>0$. Demostar que $|f\star g(x)|\le C'/(1+\|x\|)^{n+\alpha}$, (Indicación: dividir la integral que define $f\star g(x)$ en dos trozos correspondientes a $\|y\|\le\|x\|/2$ y $\|y\|>\|x\|/2$.)

6. Sea $\mathcal{F}_R(t)=R\left(\frac{\operatorname{sen}\pi tR}{\pi tR}\right)^2$ si $t\neq0$ y $\mathcal{F}_R(0)=R$ el núcleo de Fejér en la recta real.
   a) Demostar que si $f\in C_0(\mathbb{R})$, entonces $f\star\mathcal{F}_R$ converge uniformemente a f cuando $R\to\infty$.
   b) Demostar que si $f\in L^p(\mathbb{R})$, entonces $f\star\mathcal{F}_R$ converge a f en la norma de $L^p(\mathbb{R})$ cuando $R\to\infty$.

   (Indicación: usar la función g del ejercicio 3 para demostrar que $\{\mathcal{F}_R\}_{R>0}$ es una familia de núcleos de sumabilidad cuando $R\to\infty$.)

7. Demuestra que la periodización del núcleo de Fejér $\mathcal{F}_N$ en la recta real (ver el ejercicio anterior) coincide con el núcleo de Fejér para funciones periódicas de periodo 1, es decir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}_N(x+n)=F_N(x)\,,\qquad N=1,2,3,\dots$$

donde

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ikx}\right) = \sum_{n=-N}^{N}(1-\frac{|n|}{N})\, e^{2\pi inx} = \frac{1}{N}\left(\frac{\operatorname{sen}(N\pi x)}{\operatorname{sen}(\pi x)}\right)^2 .$$

(Indicación: usar la fórmula de sumación de Poisson y la función g del ejercicio 3.)

8. *a*) Aplicar la fórmula de sumación de Poisson a la función g del ejercicio 3 para obtener $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+\xi)^2} = \frac{\pi^2}{(\operatorname{sen}\pi\xi)^2}$, $\xi\in\mathbb{R},\ \xi\notin\mathbb{Z}$.

   b) Utilizar el apartado a) para demostar que $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+\xi)} = \frac{\pi}{\operatorname{tg}\pi\xi}$, $\xi\in\mathbb{R},\ \xi\notin\mathbb{Z}$.

9. Sea $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-x^2/4t}$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$ el núcleo de Gauss en $\mathbb{R}$. Demostrar que $D_0(G_t) = \sqrt{t}$ y $D_0(\widehat{G_t}) = \frac{1}{4\pi\sqrt{t}}$, donde $D_0(f)$ es la dispersión de $f\in L^2(\mathbb{R})$ alrededor de $x=0$, es decir $D_0(f) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}/\|f\|_2$ (Indicación: usar que $\widehat{(e^{-\pi x^2})}\,(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$.)

10. Sean A_n y V_n el área y el volumen de la esfera unidad y de la bola unidad en $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Usar el cambio a coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, es decir, $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_0^{\infty}\left(\int_{S^n} f(r\gamma)\,r^{n-1}\,d\sigma(\gamma)\right)dr$ para probar que $A_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ y $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, donde $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{x-1}\,dt$. (Indicación: usar que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2}\,dx = 1$.)

11. *a*) Sea $T>0$. Probar que existe $\psi\in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\psi\star f = f$ para toda $f\in L^2(\mathbb{R})$ con $\operatorname{sop}\widehat{f}\subset[-T,T]$.

    b) Probar que no existe $\psi\in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\psi\star f = f$ para toda $f\in L^2(\mathbb{R})$.

12. (**Teorema de inmersión de Sobolev**) Para $\alpha>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$, sea $H^\alpha(\mathbb{R}^n) = \{f\in L^2(\mathbb{R}^n) : (1+\|\xi\|^\alpha)\widehat{f}\,(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ el **espacio de Sobolev** de orden α. Demostrar que si $f\in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ con $\alpha>n/2$, entonces $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$. (Indicación: demostar que $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$.)

13. (★) La ecuación

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ax\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}\,, \tag{1}$$

con $u(x,0) = f(x)$ para $0<x<\infty$ y $t>0$ es una variante de la ecuación del calor. Para resolver (1), hacer el cambio de variable $x = e^{-y}$ de manera que $-\infty<y<\infty$. Sean $U(y,t) = u(e^{-y},t)$ y $F(y) = f(e^{-y})$. Demostrar que el problema se reduce a la ecuación

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (1-a)\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t}\,, \tag{2}$$

con $U(y,0) = F(y)$. La ecuación (2) puede resolverse como la ecuación del calor (el caso $a=1$) tomando transformadas de Fourier en la variable y. Se tiene entonces que calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-4\pi^2\xi^2+(1-a)2\pi i\xi)t}\, e^{2\pi i\xi v}\,d\xi$. Demostar que la solución de (1) está dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_0^{\infty} e^{-(\log(v/x)+(1-a)t)^2/(4t)}\, f(v)\,\frac{dv}{v}\,.$$