HOJA 6 DE PROBLEMAS

1. Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números complejos. Sea $B_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$ y $B_0 = 0$.

   a) Demostar la fórmula de sumación por partes:
$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n \, .$$

   b) Deducir el **criterio de Abel** sobre convergencia de series: si las sumas parciales de las serie $\sum_n b_n$ están acotadas y $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números reales tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum_n a_n b_n$ converge.

2. *a*) Demostrar la fórmula $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx = \frac{\cos(x/2) - \cos(n+1/2)x}{2\operatorname{sen}(x/2)}$.

   b) Utilizar la fórmula del apartado anterior para demostrar que la expresión $\left|\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx\right|$ está acotada, independientemente de n, para todo $x \in \mathbb{R}$.

   c) Demostrar que $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\operatorname{sen}(n+1/2)x}{2\operatorname{sen}(x/2)}$ y usarlo para probar que la expresión $\left|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right|$ está acotada, independientemente de n, para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2k\pi$.

3. Sea $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ la función characterística del intervalo $[a,b] \subset [-\pi, \pi]$.

   a) Demostar que la serie de Fourier de f es $\frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n\neq 0} \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi i n} e^{inx}$.

   b) Usar el criterio de Abel (ejercicio 1) para demostrar que la serie de Fourier de f converge en todo punto.

4. **Teorema de Weierstrass** : *toda función continua, f, definida sobre un intervalo* $[a,b]$ *puede ser aproximada uniformemente por polinomios* . (Indicación: Suponer primero que f es continua y periódica y aproximarla uniformemente por polinomios trigonométricos. Usar a continuación que se tiene, uniformemente sobre compactos, $e^{inx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(in)^k x^k$.)

5. **Núcleos de sumabilidad con parámetro continuo** en $L^1(\mathbb{T})$. Dado el intervalo $J = (a,b)$ (finito o no), se dice que la colección de funciones 1-periódicas $\{K_r\}_{r\in J} \subset L^1(\mathbb{T})$ es un NUCLEO DE SUMABILIDAD para $r \to a^+$ si se cumplen:

   i) $\exists C < \infty$ tal que $\int_{-1/2}^{1/2} |K_r(t)| dt \leq C$, $\forall r \in J$.

   ii) $\int_{-1/2}^{1/2} K_r(t)\, dt = 1$, $\forall r \in J$.

   iii) Para todo $0 < \delta < 1/2$, $\lim_{r\to a^+} \int_{\delta<|t|<1/2} |K_r(t)| dt = 0$.

   De forma similar se definen los núcleos de sumabilidad para $r \to \bar{b}$.

   Probar que si $\{K_r\}_{r\in J}$ es un núcleo de sumabilidad para $r \to a^+$ entonces

   a) $K_r * f \to f$ uniformemente cuando $r \to a^+$, $\forall f$ 1-periódica y continua.

   b) $K_r * f \to f$ en norma L^p cuando $r \to a^+$, $\forall f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$.

6. (★) Dados números reales $a_{t,n}$ con $t \in (a,b)$ y $n = 0,1,2,3,\ldots$ (ó $n \in \mathbb{Z}$) el conjunto $A = \{a_{t,n}\}$ es de sumabilidad cuando $t \to b^-$ si

i) $\lim_{t\to b^-} a_{t,n} = 0$ para todo n.

ii) $\sum_n a_{t,n} = 1$ para todo $t \in (a,b)$.

iii)$\sum_n |a_{t,n}| \le C$, con C independiente de t.

(Nota: Definición análoga puede hacerse si $t \to a^+$. También $a = -\infty$ ó $b = \infty$ son válidas. Además, t puede pertenecer a un conjunto discreto de índices, por ejemplo $t \in \mathbb{N}$ y en este caso $t \to \infty$.)

Dada una sucesión $s = \{s_n : n = 0,1,2,\ldots\}$, se define

$$A_t(s) = \sum_n a_{t,n}\, s_n \,.$$

Decimos que la sucesión $s = \{s_n\}$ es A**-sumable cuando** $t \to b^-$ si existe $\lim_{t\to b^-} A_t(s)$.

6.A. Demostrar que si $\lim_{n\to\infty} s_n = S$, entonces $\lim_{t\to b^-} A_t(s) = S$.

6.B. Tomar $a_{m,n} = \frac{1}{m}$ si $0 \le n < m$ y $a_{m,n} = 0$ si $n \ge m$ con $n = 0,1,2,3,\ldots,$ para demostrar que si $\lim_{n\to\infty} s_n = S$, entonces la sucesión $\{s_n\}$ es también Cesàro sumable.

6.C. Tomar $a_{r,n} = (1-r)r^n$ con $0 < r < 1$, $n = 0,1,2,3,\ldots$ para demostrar que si $\lim_{n\to\infty} s_n = S$, entonces la sucesión $\{s_n\}$ es también Abel sumable.

6.D. Dada la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, sean $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ n = 0,1,2,\ldots$ sus sumas parciales. Demostrar que

$$(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n\, s_n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\, a_n \,.$$

6.E. Sea $\{s_n\}$ sumable según Cesàro con límite S. Demostrar que $\{s_n\}$ es también Abel sumable y con límite S. (Indicación: usar el ejercicio 6.D para escribir $A_r(s)$ en función de las medias de Cesàro $\sigma_n = \frac{s_0+\cdots+s_{n-1}}{n}$ y aplicar el resultado del ejercicio 6.A.)