HOJA 5 DE PROBLEMAS

1. Hallar la serie de Fourier de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x$ en $-\pi \le x < \pi$. $\left[\ f(x) \sim \sum_{n\neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{in}\, e^{inx} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\ \right]$

   b) $g(x) = \frac{(\pi-x)^2}{4}$ en $0 \le x < 2\pi$. $\left[\ g(x) \sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n\neq 0}\frac{1}{2n^2}\, e^{inx} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}\ \right]$

   c) $h(x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi\alpha}\, e^{i(\pi-x)\alpha}$ en $0 \le x < 2\pi$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$. $\left[\ h(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n+\alpha}\, e^{inx}\ \right]$

2. Calcular las series de Fourier de las siguientes funciones (en todos los casos las funciones se definen en $[0, 2\pi)$ y se consideran 2π-periódicas):

   i) $f_1(x) = \operatorname{sen}(2x)\cos(x)$ ii) $f_2(x) = e^x$ iii) $f_3(x) = \cosh(x)$

3. *a)* Sea $f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ si $-\pi \le x \le 0$ y $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ si $0 < x < \pi$. Hallar sus coeficientes de Fourier y demostrar que $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\ nx}{n}$.

   b) Sea $g(x) = -1$ si $-\pi \le x \le 0$ y $f(x) = 1$ si $0 < x < \pi$. Hallar sus coeficientes de Fourier y demostrar que $g(x) \sim \sum_{n \text{ impar}} \frac{2}{i\pi n}\, e^{inx}$.

4. Sea $f(x) = x(\pi - x)$ en $[0, \pi]$ extendida de manera impar a $[-\pi, 0]$

   a) Dibujar la gráfica de f.

   b) Calcular los coeficientes de Fourier de f y demostrar que $f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}((2k+1)x)}{(2k+1)^3}$.

5. En el intervalo $[-\pi, \pi]$ considerar la función de la forma $f(x) = 0$ si $|x| > \delta$ y $f(x) = 1 - \frac{|x|}{\delta}$ si $|x| \le \delta$. Dibujar la gráfica de f y demostrar que $f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(n\delta)}{\pi n^2\delta}\cos(nx)$.

6. Sea f la función definida en $[-\pi, \pi)$ mediante $f(x) = |x|$.

   a) Dibujar la gráfica de f.

   b) Calcular los coeficientes de Fourier de f y demostrar que $\widehat{f}(0) = \frac{\pi}{2}$ y $\widehat{f}(n) = \frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2}$ si $n \neq 0$.

   c) ¿ Cuál es la serie de Fourier de f en términos de senos y cosenos ?

   d) Tomando $x = 0$ demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

7. Utilizar la identidad de Plancherel y los resultados de los apartados *b)* y *c)* del ejercicio 1 para probar

$$i)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad\qquad ii)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi\alpha)},\ \alpha \notin \mathbb{Z}.$$

8. Utilizar el ejercicio 4 y la identidad de Plancherel para demostrar que

$$i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \qquad\qquad ii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

9. Utilizar el ejercicio 6 y la identidad de Plancherel para demostrar que

$$i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \qquad\qquad ii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

10. Sea F_N el N-ésimo núcleo de Fejér: es decir $F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x)$, donde D_N es el N-ésimo núcleo de Dirichlet.

    a) Calcular los coeficientes de Fourier de F_N.

    b) Probar que para todo $j \in \mathbb{Z}$, $\lim_{N\to\infty} \widehat{F_N}(j) = 1$.

    c) Probar que $\lim_{N\to\infty} \|F_N\|_2 = \infty$.

    d) Calcular $\lim_{N\to\infty} \frac{\|F_N\|_2}{\|D_N\|_2}$.

11. Probar que $\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$ para toda $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Deducir que si P es un polinomio trigonométrico, entonces también lo es $P * f$ para toda $f \in L^1(\mathbb{T})$.

12. Sea $k = 1, 2, 3, \ldots$ y supongamos que $f \in L^1(\mathbb{T})$ es tal que $|\widehat{f}(0)| \leq C$ y $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^{k+1}}$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Demostrar que $f \in C^{k-1}(\mathbb{T})$.

13. Demostrar que los coeficientes de Fourier de una función continua pueden tender a cero tan lentamente como se desee probando que para cualquier sucesión de números reales no negativos $\{\epsilon_n\}$ que converja a cero existe una función continua f tal que $|\widehat{f}(n)| \geq \epsilon_n$ para una cantidad infinita de valores de n. (Indicación: elegir una subsucesión $\{\epsilon_{n_k}\}$ tal que $\sum_k \epsilon_{n_k} < \infty$)

14. *a*) Demostrar que la integral impropia $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ es convergente mayorándola por una serie alternada.

    b) Demostrar que $\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx = \infty$.

    c) Demostrar que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ integrando $e^{-xy} \operatorname{sen} x$ con respecto a x y con respecto a y (esto es un ejercicio de cálculo de integrales dobles).

15. Probar (de manera diferente a la del ejercicio 14) que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$ aplicando el lema de Riemann-Lebesgue a la función $g(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x/2)} - \frac{1}{x/2}$ (el razonamiento es similar al del principio de localización de Riemann).

16. Sea $f(x) = -\log|2\operatorname{sen}(x/2)|$ en $(0, 2\pi)$.

    a) Dibujar su gráfica y demostrar que $f \in L^1(\mathbb{T})$.

    b) Demostrar que la serie de Fourier de f es $\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n}$.

    c) Con $x = \pi$ en el apartado anterior deducir la fórmula $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$