VARIABLE REAL. 4º DE MATEMATICAS *Curso 2005/06 (E. Hernández)*

HOJA 4 DE PROBLEMAS

1. *a*) La expresión $< f, g >= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$ define un producto escalar en $C([0,1])$. Demostrar que $C([0,1])$ con este producto escalar **no** es un espacio de Hilbert.

   b) La expresión $< f, g >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ define un producto escalar en $C_c(\mathbb{R})$. Demostrar que $C_c(\mathbb{R})$ con este producto escalar **no** es un espacio de Hilbert.

2. Demostrar que en un espacio pre-Hilbert $(\mathbb{H}, < \ , \ >)$ si $\|x\| = \|y\| = 1$ y $x \neq y$, se cumple $\|x + y\| < 2$. (Indicación: usar la regla del paralelogramo.)

3. Demostrar que en un espacio pre-Hilbert se cumple la **identidad de polarización**:

$$< x, y >= \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right] .$$

4. Si $(\mathbb{H}, < \ , \ >)$ es un espacio pre-Hilbert, demostrar que para todo $x \in \mathbb{H}$ se cumple

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} | < x, y > | .$$

5. *a*) Demostrar que la norma $\|f\|_\infty$ definida en $L^\infty([0,1])$ no puede provenir de un producto escalar.

   b) Demostar que $L^2([0,1])$ es el único espacio de Hilbert de entre todos los espacios $L^p([0,1]),\ 0 < p < \infty$.
   (Indicación: probar que no se cumple la ley del paralelogramo)

6. Demostrar que el conjunto

$$\mathcal{U} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

   es una base ortonormal de $L^2([-\pi\,,\,\pi])$. (Indicación: usar que $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2([-\pi\,,\,\pi])$.

7. Demostrar que cada uno de los conjuntos

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx \right\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{U}_2 = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} nx \right\}_{n=1}^{\infty}$$

   es una base ortonormal de $L^2([0\,,\,\pi])$. (Indicación: como en el ejercicio anterior.)

8. Sea $C_0^{(N)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $C_k^{(N)} = \left(\cos(\frac{k\pi}{N}\frac{2m+1}{2})\right)_{m=0}^{N-1}$, $k = 1, \ldots, N-1$. Demostrar que los vectores

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{N}}\, C_k^{(N)} \ : k = 0, 1, \ldots, N-1 \right\}$$

   forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^N$. (Indicación: Demostrar $\sum_{m=0}^{N-1}\cos(\frac{k\pi}{N}\frac{2m+1}{2}) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, 2N-1$ usando la fórmula $2\cos\alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$)

9. Sea $T_n(x)$ el polinomio de Chevyshev de grando n, es decir,

$$T_0(x) = 1\,, \qquad T_n(x) = 2^{1-n}\cos(n \arccos x)\,,\ n = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

   a) Demostrar que $T_n(x)$ es un polinomio de grado n .

   b) Demostrar que $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema ortogonal de $L^2([-1,1])$ con el producto escalar dado por

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,.$$

   c) Demostrar que $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base ortonormal de $L^2([-1,1])$, donde

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,, \qquad \phi_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{2\pi}}\, T_n(x)\,,\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

10. Los polinomios de Legendre se definen mediante

$$P_0(x) = 1\,, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\, \frac{d^n}{dx^n}\,(x^2-1)^n\,,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

   a) Demostrar que $\{P_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ forman un sistema ortogonal de $L^2([-1,1])$. (Indicación: usar integración por partes para probar $\int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^m\, dx = 0$ si $n > m$)

   b) Demostrar que

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\, dx = \int_{-1}^{1}(1-x)^n\,(1+x)^n\, dx = \frac{(n!)^2\ 2^{2n+1}}{(2n)!\ (2n+1)}$$

   usando integración por partes.

   c) Usar los apartados anteriores para demostrar que $\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}\ P_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ forman un sistema ortonormal de $L^2([-1,1])$.

11. Calcular min $\{\int_{-1}^{1}|x^3 - a - bx - cx^2|^2\, dx\ : a, b, c \in \mathbb{R}\}$. (Indicación: usar una base ortonormal de los polinomios de grado 2 en $L^2([-1,1])$ - ver el ejercicio anterior.)

12. Calcular min $\{\int_0^{\infty}|x^3 - a - bx|^2\, e^{-x}\, dx\ : a, b \in \mathbb{R}\}$. (Indicación: hallar una base ortonormal de los polinomios de grado 1 en $L^2([0,\infty])$ con $< f, g >= \int_0^{\infty} f(x)g(x)\, e^{-x}\, dx$.)

13. Sea $(\mathbb{H}, <\ ,\ >)$ un espacio de Hilbert.

   a) Si M is un subespacio vectorial cerrado de $\mathbb{H}$, demostar que $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

   b) Sea $\mathcal{U} = \{u_\alpha\}_\alpha$ un sistema ortonormal **no** finito. Demostrar que $\mathcal{U}$ es un conjunto cerrado y acotado, pero no compacto.

   c) Si $x_0 \in \mathbb{H}$ y M es un subespacio vectorial cerrado de $\mathbb{H}$, demostar que

$$\min\,\{\|x_0 - x\| : x \in M\} = \max\,\{\,|< x_0, y >| : y \in M^{\perp}\,,\ \|y\| = 1\}\,.$$

---

14. (★) Demostrar que cualquier espacio de Banach complejo con una norma $\|\ \|$ que satisfaga la ley del paralelogramo es un espacio de Hilbert con el producto escalar definido por

$$< x, y >= \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right]\,.$$

y se tiene $< x, x >= \|x\|^2$.