HOJA 3 DE PROBLEMAS

1. Sea $c_0(\mathbb{N})$ el espacio de sucesiones $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Demostrar que si $0 < p < \infty$ se cumple que $\ell^p(\mathbb{N})$ es un subespacio denso de $c_0(\mathbb{N})$, dotado éste con la norma $\| \ \|_\infty$.

2. Supongamos que $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos con la propiedad de que
$$\sup\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n : \|b\|_2 = 1\} = S < \infty$$
Demostrar que $a \in \ell^2$ y $\|a\|_2 = S$.

3. Sea $h = \chi_{(0,1)}$
   a) Calcular y dibujar $h * h$.
   b) Calcular y dibujar (con ordenador si te hace falta) $h * h * h$.

4. (**Forma general de la desigualdad de Young**) Sean $1 \le p, q, r \le \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Demostrar que si $f \in L^p$ y $g \in L^q$ se cumple que $f * g \in L^r$ y
$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q \,.$$
(Indicacion: observar que $(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) + (\frac{1}{q} - \frac{1}{r}) + \frac{1}{r} = 1$ y usar la desigualdad de Hölder para probar que
$$|f * g(x)| \le \|f\|_p^{\frac{r-p}{r}} \|g\|_q^{\frac{r-q}{r}} \left(\int |f(y)|^p \, |g(x-y)|^q \, dy \right)^{1/r} \ ;$$
después usar el teorema de Fubini para acotar $\|f * g\|_r$.)

5. Sea $C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ continua y } \lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0\}$.
   a) Demostrar que $C_c(\mathbb{R})$ es denso en $C_0(\mathbb{R})$ con la topología de $\| \ \|_\infty$.
   b) Demostrar que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $C_0(\mathbb{R})$ con la topología de $\| \ \|_\infty$. (Indicación: usar el apartado (a) y el teorema de regularización de funciones mediantes convoluciones)

6. Sean A y B dos espacios vectoriales normados y $T : A \to B$ un operador lineal. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   a) T es Lipschitz, es decir, existe $C < \infty$ tal que $\|Tx - Ty\|_B \le C\|x - y\|_A$ para todo $x, y \in A$.
   b) T es continuo para todo $x \in A$.
   c) T es continuo en $x = 0 \in A$.
   d) T es acotado, es decir, existe $C < \infty$ tal que $\|Tx\|_B \le C\|x\|_A$ para todo $x \in A$.

7. Sea $T : L^1(X, \mu) \to L^1(X, \mu)$ un operador lineal y acotado. Demostrar que existe $C < \infty$ tal que para toda $f \in L^1(X, \mu)$ se tiene
$$\mu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\}) \le \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 \,.$$

8. A partir del teorema de **Hardy-Littlewood** y usando la desigualdad de Jensen probar que si $p \in [1, \infty)$ existe $C < \infty$ tal que para toda $f \in L^p(\mathbb{R})$ y para todo $\lambda > 0$ se cumple que
$$|\{x \in \mathbb{R} : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p \, dy \,,$$
donde M es la función maximal de Hardy-Littlewood.

9. Describir la función maximal de Hardy-Littlewood Mf para $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$. Usar este resultado para probar que el operador maximal de Hardy-Littlewood M no está acotado de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$.

10. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ medible. Se llama **función de distribución** de f a la función $\sigma_f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por
$$\sigma_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) \,.$$
   a) Demostrar que $\|f\|_{L^1(X,\,\mu)} = \|\sigma_f\|_{L^1(0,\infty)}$.
   b) Describir y dibujar la función de distribución de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f = 5\chi_{(-3,-2)} + 2\chi_{(0,2)} - 3\chi_{(4,7)}$$

11. Sean p y q exponentes conjugados con $1 \leq p < \infty$. Si $f \in L^p(X, \mu)$, demostrar que
$$\|f\|_p = \sup \left\{ \left| \int_X f \, \bar{g} \, d\mu \right| : \|g\|_q = 1 \right\}$$
(Indicación: para demostrar $\geq$ usar la desigualdad de Hölder; para probar $\leq$ tomar $g_0(x) = |f(x)|^{p-2} f(x) / \|f\|_p^{p-1}$ cuando sea posible y $g_0(x) = 0$ si $f(x) = 0$.)

12. (**Desigualdad integral de Minkowski**) Sean $(X,\ \mu)$ e $(Y,\ \nu)$ dos espacios de medida y $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ una función medible. Si $1 \leq p \leq \infty$, $f(\cdot\,, y) \in L^p(X, \mu)$ c.t. $y \in Y$ y la función $y \to \|f(\cdot\,, y)\|_p$ pertenece a $L^1(Y, \nu)$, demostrar que se cumple:
$$\Big\| \int_Y f(\cdot, y) \, d\nu(y) \Big\|_{L^p(X,\,\mu)} \leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^p(X,\,\mu)} \, d\nu(y) \,.$$
(Nota: esta desigualdad se puede leer de la siguiente manera: la norma de una integral es menor o igual que la integral de las normas)

(Indicación: usar el ejercicio anterior y la desigualdad de Hölder)

13. Sea $K : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{C}$ medible tal que $K(\lambda x\,, \lambda y) = \frac{1}{\lambda} K(x\,, y)$ para todo $\lambda > 0$ y $\int_0^\infty |K(x\,, 1)| \, x^{-1/p} \, dx = C < \infty$ para algún $p \in [1\,, \infty]$. Sea q el exponente conjugado de p. Para $f \in L^p$ y $g \in L^q$ definir
$$Tf(y) = \int_0^\infty K(x\,, y) \, f(x) \, dx \qquad \text{y} \qquad Sg(x) = \int_0^\infty K(x\,, y) \, g(y) \, dy \,.$$
   a) Demostrar que T es un operador acotado de $L^p(0, \infty)$ en $L^p(0, \infty)$.
   b) Demostrar que S es un operador acotado de $L^q(0, \infty)$ en $L^q(0, \infty)$.

(Indicación: para el apartado (a) hacer el cambio de variable $z = x/y$ y después utilizar la desigualdad integral de Minkowski. Hace algo similar para el apartado (b).)

14. (**Desigualdad de Hilbert**) Demostrar que el operador
$$Tf(y) = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x + y} \, dx$$
es acotado de $L^p(0, \infty)$ en $L^p(0, \infty)$ para todo $p \in (1, \infty)$. (Indicación: usar el ejercicio anterior)